FUNKTIONAL-ABLEITUNGEN

Diese Übung soll das Konzept der Funktional-Ableitung auffrischen, das bei klassischen Feldtheorien eine wichtige Rolle spielt und Grundbestandteil der Funktionalanalysis ist.

Endlich-dimensionale Analogie. Wir betrachten zunächst einen Fall mit endlich vielen Freiheitsgraden. Sei $L : V \to \mathbb{R}$ eine (nichtlineare) Abbildung auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum. Zum Beispiel könnte V der Konfigurationsraum, aufgesapnnt durch $\{q^i, \dot{q}^i\}$, $i = 1, \ldots N$, und L eine Lagrange-Funktion sein. Die Ableitung von L an der Stelle $v \in V$ und in Richtung $h \in V$ ist gegeben durch

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(L(v + \varepsilon h) - L(v)) \equiv \frac{\mathrm{d}L(v)}{\mathrm{d}v}(h)\,.$$

Diese Ableitung ist linear in h, kann also durch ein Skalarprodukt ausgedrückt werden. Wir schreiben daher einfach

$$\frac{\mathrm{d}L(v)}{\mathrm{d}v}(h) = \frac{\mathrm{d}L(v)}{\mathrm{d}v} \cdot h\,.$$

Was ist also $\frac{\mathrm{d}L(v)}{\mathrm{d}v}$ für ein Objekt?

Lineare Funktionale. Geht man zum unendlich-dimensionalen Fall über, so tritt ein Problem auf. Auch wenn V eine Topologie hat (so dass Stetigkeit definiert ist), so können wir nicht zu jeder stetigen linearen Abbildung $V \to \mathbb{R}$ einen Vektor aus V finden, mit dem wir sie identifizieren können. Das geht nur, wenn V ein Hilbert-Raum ist.

Sei z.B. $V = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $g \in V$. Dann ist

$$T_g : f \mapsto \int \mathrm{d}x\, f(x) g(x)$$

linear und stetig. Jede Funktion g kann also als lineares Funktional T_g aufgefasst werden. Betrachten wir aber nun folgendes Funktional:

$$\delta_{x_0} : f \mapsto f(x_0)\,.$$

Auch dies ist linear und stetig. In Analogie zum endlich-dimensionalen Fall schreibt man für die Anwendung von δ_{x_0} auf f auch

$$\delta_{x_0}[f] = \langle \delta_{x_0}, f \rangle = \int \delta_{x_0} f = \int \mathrm{d}x\, \delta_{x_0}(x) f(x) = \int \mathrm{d}x\, \delta(x - x_0) f(x)\,,$$

da das Integral ein Skalarprodukt auf V ist. Wie sieht das im endlich-dimensionalen Fall aus? Wieso kann $\delta(x-x_0)$ keine Funktion aus V sein? Es gibt also kein g, so dass $T_g = \delta_{x_0}$. Solche linearen stetigen Funktionale auf Funktionenräumen heißen Distributionen.

Distributive Ableitung. Sie V wie oben für $d = 1$ (oder mindestens C^1 mit kompaktem Träger oder als Schwarz-Raum, usw.) und T_g wieder die $g \in V$ zugeordnete Distribution. Zeige mittels partieller Integration, dass $T_{g'}[f] = -T_g[f']$. Man definiert daher für jede Distribution T mittels $T'[f] \equiv -T[f']$ die distributive Ableitung von T. Offensichtlich ist $(T_g)' = T_{g'}$. Man schreibt auch $T' = \partial_x T$. Sei θ die Heaviside-Distribution, $\theta(x < 0) = 0$, $\theta(x \geq 0) = 1$. Zeige, dass $\theta'[f] = \delta_0[f]$ ist. Zeige weiter, dass $\delta'_{x_0} = -f'(x_0)$ ist. Höhere Ableitungen werden induktiv definiert, und analog führt man partielle distributive Ableitungen für den Fall $d > 1$ ein.

Funktionalableitung. Allgemein sind Funktionale nichtlineare Abbildungen von einem Funktionenraum V nach $\mathbb{R}$. Eine sinnvolle Ableitung sollte also eine Linearisierung in einer Funktion f (was einem Punkt in V entspricht) sein, sollte also ein lineares Funktional sein. Sei $L : V \to \mathbb{R}$ ein Funktional. Wir definieren analog zum Gradienten die Ableitung von L an der Stelle $f \in V$ in Richtung $h \in V$ durch

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(L[f + \varepsilon h] - L[f]) \equiv \frac{\delta L[f]}{\delta f}[h]\,.$$

Auch wenn dies linear in h ist, kann man dies nicht unbedingt durch ein Skalarprodukt mit einem Vektor aus V ausdrücken. Aufgrund der Linearität schreibt man für das Funktional aber einfach $\frac{\delta L[f]}{\delta f}$. Man nennt die Funktionalableitung auch Variation von $L[f]$ nach f. Warum?

RECHENREGELN

Hier wollen wir einfache Beispiele und wichtige Rechenregeln für Funktionalableitungen betrachten, die in der Feldtheorie immer wieder angewandt werden.

Lineares Funktional. Ist L selbst linear, so ist per definitionem $L[f+\varepsilon h] - L[f] = \varepsilon L[h]$. Was ergibt sich also für die Funktionalableitung $\frac{\delta L[f]}{\delta f}$ von L? Sei speziell $L[f] = T_g[f]$ für ein festes g. Was ergibt sich jetzt für die Funktionalableitung?

Kettenregel I. Sei speziell $L[f] = \int \mathrm{d}x\, F(f(x))$ für eine wenigstens einmal stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, dass die Funktionalableitung $\frac{\delta L[f]}{\delta f} = F'(f)$ ist. Dies ist die globale Kettenregel.

Delta-Distribution. Sei $L[f] = \delta_{x_0}[f] = f(x_0)$. Wir wissen schon, dass dieses L linear ist. Es ist also $\frac{\delta \delta_{x_0}[f]}{\delta f} = \delta_{x_0}$. Diskutiere die Bedeutung dieser Identität, die in der Physik so geschrieben wird:

$$\frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)} = \delta(x - x_0)\,.$$

Vergleiche dies insbesondere mit dem endlich-dimensionalen Fall.

Kettenregel II. Sei speziell $L[f] = \delta_{x_0}[F(f)] = F(f(x_0))$ für eine mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rechne wie bei der globalen Kettenregel nach, dass $\frac{\delta L[f]}{\delta f} = F'(f)\delta_{x_0}$. In der Physik schreibt man das als

$$\frac{\delta F(f(x_0))}{\delta f(x)} = \frac{\partial F(f)}{\partial f}\frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)} = F'(f(x))\delta(x - x_0)\,.$$

Dies ist die lokale Kettenregel. Wie kommt man von der lokalen Form auf die globale?

Vertauschen mit partiellen Ableitungen. Ist L ein Funktional, so ist $K[f] \equiv L[f']$ ein neues Funktional, das nur von $f' \equiv \partial_x f$ abhängt. Berechne die Funktionalableitung von K und zeige damit

$$\frac{\delta L'[f]}{\delta f} = -\frac{\delta L[f']}{\delta f} = \partial_x \frac{\delta L[f']}{\delta f'}\,,$$

wobei wir in Analogie zur distributiven Ableitung $L'[f] \equiv -L[f']$ definiert haben, also $L'[f| = -K[f]$. Auch diese Identität hat eine vielleicht intuitivere Physiker-Schreibweise:

$$\frac{\delta f'(x_0)}{\delta f(x)} = \frac{\delta \frac{\partial f(x_0}{\partial x_0}}{\delta f(x)} = \frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)} = \frac{\partial}{\partial x_0}\delta(x - x_0) = \delta'(x - x_0)\,.$$

Was ist die Bedeutung dieser Identität?

Als Beispiel rechne schließlich nach, dass $\frac{\delta}{\delta f}\int \mathrm{d}x\, F(f'(x)) = -F''(f')f''$ ist.