DIFFERENTIALFORMEN

Eine wichtige Struktur bei bei Faserbündeln sind die Differentialformen. Diese sollen nun als nächstes eingeführt werden.

Differentiale. Betrachte eine Abbildung $f : Y^m \to X^n$. Diese induziert eine Abbildung der Tangentialbündel, die das *Differential* $\mathrm{d}f$ von f genannt wird: $\mathrm{d}f : T(Y^m) \to T(X^n)$. Diese Abbildung definiert man wieder über Karten. Die Unabhängigkeit des Resultats von der speziellen Wahl der Karten garantiert dann, dass wir damit ein echtes "geometrisches Objekt" definiert haben. Seien Karten (U_ι, φ_ι) für Y^m mit $y \in U_\iota$ und (V_κ, ψ_κ) für X^n mit $f(U_\iota) \subset V_\kappa$ und $f(y) = x \in V_\kappa$ gewählt. Die Koordinatendarstellung von f ist wieder $f_{\kappa\iota} = \psi_\kappa \circ f \circ \varphi_\iota^{-1} : \varphi_\iota(U_\iota) \subset \mathbb{R}^m \to \psi_\kappa(V_\kappa) \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathrm{d}f_{\kappa\iota} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ das bekannte Differential einer Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen, gegeben als $\partial x^i/\partial y^\alpha$. Kombiniert mit den Karten habebn wir auch Abbildungen $\varphi_{\iota y} : T_y(Y^m) \to \mathbb{R}^m$ und $\psi_{\kappa x} : T_x(X^n) \to \mathbb{R}^n$, die jedem Tangentialvektor seiner Koordinatendarstellung zuordnen.

Sei nun $s \in T_y(Y^m)$. Damit definieren wir

$$s \in T_y(Y^m) \mapsto \mathrm{d}f_y(s) = \psi_{\kappa x}^{-1} \circ \mathrm{d}f_{\kappa\iota} \circ \varphi_{\iota y}(s) \in T_x(X^n)\,.$$

Diese Abbildung hängt nicht von der Wahl der Karten ab.

Kotangentialbündel. Wir betrachten den Spezialfall $X^n = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Dann ist $\mathrm{d}f_y$ eine so genannte *lineare Form* auf $T_y(Y^m)$. Wir haben

$$\mathrm{d}f_y(s) = \left.\frac{\partial f_\iota}{\partial y^i}\right|_y s^i\,.$$

Beispiel: $f = y^j(y)$ und $s = \partial/\partial y^i$. Damit haben wir mit dem natürlichen Skalarprodukt

$$\langle \mathrm{d}y^j, \frac{\partial}{\partial y^i}\rangle \equiv \mathrm{d}y^j(\frac{\partial}{\partial y^i}) = \delta_i^{\ j}\,,$$

Der Raum der linearen Formen auf $T_y(Y^m)$ wird mit $T^*_y(Y^m)$ bezeichnet. Man nennt die disjunkte Vereinigung

$$T^*(Y^m) = \bigcup_{y\in Y^m} T^*_y(Y^m)$$

das *Kotangentialbündel* von Y^m. Es ist ebenfalls ein Beispiel für ein Faserbündel.

Pullback. Eine Abbildung $f : Y^m \to X^n$ induziert eine sogenannte *Pullback Abbildung* $f^* : T^*(X^n) \to T^*(Y^m)$ der Kotangentialbündel ineinander:

$$f^* : \omega \in T^*_x(X^n) \mapsto f^*\omega \in T^*_y(Y^m)$$

mit

$$(f^*\omega)_y(s) = \omega(\mathrm{d}f_y(s))\,,$$

wobei $x = f(y)$ und $s \in T_y(Y^m)$.

Formen höherer Ordnung. Wir führen nun Differentialformen höherer Ordnung r ein, die r-Formen. Lineare Formen nennen wir auch 1-Formen. Die r-Formen sind antisymmetrische r-lineare Abbildungen, die über der Algebra der Funktionen auf Y^m definiert werden, $\mathcal{F}(Y^m)$, und die aus dem r-fachen Produkt der Menge $\mathcal{X}(Y^m)$ der Vektorfelder sind:

$$\underbrace{\mathcal{X}(Y^m) \times \cdots \times \mathcal{X}(Y^m)}_{r \text{ times}}\,.$$

Dahinter steckt folgendes. Seien $\omega_1, \ldots, \omega_r$ irgendwelche 1-Formen. Dann konstruieren wir eine spezielle r-Form $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_r$ wie folgt: Seien $X_1, \ldots, X_r$ Vektorfelder. Das Resultat der r-linearen Abbildung ω ist dann gegeben als

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r)(X_1, \ldots, X_r) = \frac{1}{r!}\det(\omega_j(X_k))\,.$$

Die individuellen Matrixelemente werden wieder mit der Hilfe von Karten angegeben:

$$\begin{array}{rcl} \omega_j &=& f_{(j)i}\mathrm{d}y^i \qquad\qquad\qquad i=1,\dots,m\,,\\ X_k &=& X^p_{(k)}\frac{\partial}{\partial y^p} \qquad\qquad\qquad p=1,\dots,m\,,\\ \omega_j(X_k) &=& f_{(j)i}X^p_{(k)}\mathrm{d}y^i(\frac{\partial}{\partial y^p}) \;=\; f_{(j)i}X^i\,. \end{array}$$

Dies ist eine Funktion auf Y^m. Eine allgemeine r-Form ist eine Linearkombination solcher spezieller r-Formen über der Algbra $\mathcal{F}(Y^m)$. Sind ω_r ein r-Form und ω_s eine s-Form, so ist $\omega_r \wedge \omega_s$ eine $(r+s)$-Form. Der oben eingeführte Pullback für 1-Formen induziert natürlich einen Pullback Abbildung auf allgemeinen r-Formen.

Äußere Ableitung. Wir bezeichnen mit d den *Operator der äußerem Ableitung*. Er agiert auf r-Formen ω und ergibt $(r+1)$-Formen $\mathrm{d}\omega$ gemäß der folgenden Regeln:

[D1] Die Anwendung von d auf 0-Formen (Funktionen) ergibt das totale Differential $\mathrm{d}f$ der Funktion f.

[D2] Es gilt die (graduierte) Leibniz-Regel für Formen $\omega \wedge \pi$ mit ω einer r-Form und π einer s-Form:

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\pi) = \mathrm{d}\omega\wedge\pi + (-1)^r\omega\wedge\mathrm{d}\pi\,.$$

[D3] Es gilt das Poincarè-Lemma $\mathrm{d}^2 = 0$.

In einer Karte ist eine r-Form ω gegeben als

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_r} f_{i_1\dots i_r}\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}u^{i_r}\,.$$

Dann ist $\mathrm{d}\omega$ gegeben als

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i_1<\dots<i_r} \mathrm{d}f_{i_1\dots i_r}\mathrm{d}u^{i_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}u^{i_r}\,.$$

Der Operator d vertauscht mit der Pullback Operation f^*, die von der Funktion f induziert wird:

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\omega)\,.$$

Hausaufgabe: Überlege, wie die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $T(X^n)$ und $T^*(X^n)$ mit Karten ausgestattet werden können, die von den Karten auf X^n induziert werden.

Beispiel. Sei $f: X^m \to Y^n$ eine Abbildung. Die Koordinatendarstellung von f ist $y^\alpha = f^\alpha(x^i)$. Seien weiter

$$s^i\frac{\partial}{\partial x^i} = s \in T(X^n)\,,\quad g_\beta\mathrm{d}y^\beta = \omega \in T^*(Y^n)$$

Darstellungen von s und ω in einer gegebenen Basis. Wir wissen, dass

$$\omega(\mathrm{d}f(s)) = (f^*\omega)(s)$$

ist. Wir wollen $f^*\omega \in T^*(X^m)$ bestimmen. Wir haben

$$\mathrm{d}f(s) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}s^i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\,,\quad \omega(\mathrm{d}f(s)) = g_\beta\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}s^i\,.$$

Sei die Darstellung von $f^*\omega$ in der gegebenen Basis $h_i\mathrm{d}x^i$. Dann ist

$$(f^*\omega)(s) = h_is^i\,,\quad h_is^i = g_\beta\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}s^i\,.$$

Das muss für alle s^i gelten. Also folgt

$$f^*\omega = g_\beta(f(x))\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\,.$$

Weiter haben wir

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}g_\beta\wedge\mathrm{d}y^\beta \quad \text{und} \quad f^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}g_\beta\wedge\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\,,$$

und ebenso

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = \mathrm{d}g_\beta\wedge\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\,.$$

Das impliziert schließlich $f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f^*\omega)$.