

LIE GRUPPEN

Die Faserbündel, die in der Physik eine wichtige Rolle spielen, sind die sogenannten Prinzipalbündel. In diesen ist die Strukturgruppe eine Lie-Gruppe. Daher wiederholen wir einige grundlegende Definitionen und Eigenschaften von Lie-Gruppen.

Lie-Gruppe. Eine Mannigfaltigkeit G^r ist gleichzeitig eine *Lie-Gruppe*, wenn die Abbildung

$$(g, h) \in G^r \times G^r \mapsto g \cdot h^{-1} \in G^r$$

differenzierbar ist. Auf eine Lie-Gruppe finden also die Konzepte einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Anwendung.

Die Gruppenelemente erzeugen drei wichtige Diffeomorphismen von G^r auf sich selbst:

[LT] Linkstranslation $L_g : x \in G^r \mapsto L_g x = gx \in G^r$.

[RT] Rechtstranslation $R_g : x \in G^r \mapsto R_g x = xg \in G^r$.

[IA] Innerer Automorphismus $\alpha_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$.

Man schreibt für die *Konjugation* α_g auch *Adg*. Überlege, dass die folgenden Relationen gelten:

$$\begin{aligned} L_{gh} &= L_g \circ L_h, & L_{g^{-1}} &= L_g^{-1}, \\ R_{gh} &= R_h \circ R_g, & R_{g^{-1}} &= R_g^{-1}, \\ L_g \circ R_h &= R_h \circ L_g, & \alpha_{gh} &= \alpha_g \circ \alpha_h, & \alpha_{g^{-1}} &= \alpha_g^{-1}. \end{aligned}$$

Lie-Untergruppen. Um Lie-Untergruppen betrachten zu können, müssen wir kurz das Konzept der Untermannigfaltigkeit behandeln. Bis jetzt haben wir nur offene Untermannigfaltigkeiten behandelt. Sie $f : M \rightarrow M'$ eine bijektive Abbildung, deren Differential df ebenfalls an jedem Punkt von M bijektiv sei. Wir sagen dann, dass M , und ebenso $f(M)$, eine *Untermannigfaltigkeit* von M' ist.

Eine *Lie-Untergruppe* H einer Lie-Gruppe G ist eine Untergruppe von G , die gleichzeitig eine Untermannigfaltigkeit von G ist, und die selbst, mit dieser Mannigfaltigkeitsstruktur, eine Lie-Gruppe ist.

Vektorfelder. Unter allen Vektorfeldern einer Lie-Gruppe spielen die *linksinvarianten* bzw. die *rechtsinvarianten* Vektorfelder eine besondere Rolle. Sie X ein Vektorfeld auf G , wobei $X_a \in T_a(G)$. Sei weiter dL_g das Differential der Abbildung $L_g : L_g a = ga$. Dann ist $dL_g X_a$ ein Vektor an der Stelle $ga : dL_g X_a \in T_{ga}(G)$.

Ein Vektorfeld X heißt *linksinvariant*, wenn $X_{ga} = dL_g X_a$ für alle Elemente g und a von G . Analog sind rechtsinvariante Vektorfelder definiert.

Lie-Algebra. Verwendet man die üblichen Regeln für die Addition von Vektorfeldern, für die Multiplikation mit Funktionen, und für die Verwendung des Kommutators als "Multiplikation" von Vektorfeldern, dann formen die linksinvarianten Vektorfelder eine Lie-Algebra, die Lie-Algebra der Lie-Gruppe G , bezeichnet mit \mathfrak{g} . Wir sprechen auch von linksinvarianten Differentialformen auf G , wenn $dL_g \omega = \omega$ für alle $g \in G$. Die Menge aller linksinvarianten 1-Formen, \mathfrak{g}^* , bildet einen Vektorraum der dual zur Menge aller linksinvarianten Vektorfelder ist.

Jeder Automorphismus φ einer Lie-Gruppe induziert einen Automorphismus $d\varphi$ der Lie-Algebra \mathfrak{g} von G . Das trifft insbesondere auf den inneren Automorphismus $\text{Ad}g$, $g \in G$ zu. Wir schreiben für $d(\text{Ad}g)$ einfach $\text{ad}g$.

Adjungierte Darstellung. Die Darstellung $a \mapsto \text{Ada}$, $a \in G$, heißt *adjungierte Darstellung* von G auf \mathfrak{g} . Für $A \in \mathfrak{g}$ haben wir

$$(\text{Ada})A = R_{a^{-1}}A,$$

was eigentlich das folgende bedeutet:

$$d(\text{Ada})(A) = dR_{a^{-1}}(A).$$

Um zu sehen, dass dies stimmt, erinnern wir uns, dass $\text{Ada}(x) = axa^{-1}$, $x \in G$, ist. Weiter wirkt dL_a so auf A_x an der Stelle x , dass es das Vektorfeld A am Punkt ax ergibt. Auf dem Resultat wirkt nun $dR_{a^{-1}}$ so, dass wir $dR_{a^{-1}}A_{ax}$ erhalten, was wieder ein Vektor an der Stelle $a^{-1} \circ ax = x$ ist. Im allgemeinen ist dieser verschieden von $A_{axa^{-1}}$. Diese Betrachtungen demonstrieren, wie Relationen zwischen Feldern benutzt werden können, um Relationen zwischen Objekten an Punkten von Mannigfaltigkeiten zu erhalten.

Der Vektorraum \mathfrak{g} kann mit dem Tangentialraum $T_e(G)$ am Eins-Element e von G identifiziert werden, da jedes linksinvariante Vektorfeld von einem Element von $T_e G$ durch Linkstranslation erzeugt werden kann. Umgekehrt kann jedes solche Element wieder an den Punkt e zurückgebracht ("push back") werden.

Differentialformen. Bis jetzt haben nur solche "einfache" Differentialformen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten betrachtet, die Vektorfelder in die reellen Funktionen abbilden. Damit wird an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit jedem Vektor eine reelle Zahl zugewiesen. Wir müssen dieses Konzept nun so verallgemeinern, dass die zugewiesenen Werte nicht einfach nur reelle Zahlen, sondern Elemente von bestimmten Vektorräumen sein können. Wir sprechen dann von *Differentialformen mit Werten im Vektorraum* V^N . Ein Beispiel dafür ist die *kanonische Form* θ einer Lie-Gruppe G . Dies ist eine linksinvariante 1-Form, die jedes Element $A \in \mathfrak{g}$ auf sich selbst abbildet, $\theta(A) = A$.

Darstellung auf Mannigfaltigkeiten. Meist begegnet man Darstellungen von Lie-Gruppen auf Vektorräumen. In der Eichfeldtheorie hingegen muss man eigentlich die Darstellung der Operation einer Lie-Gruppe auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (wie die Lie-Gruppe selbst) studieren.

Ein Paar (G^r, X^n) wird *Transformationsgruppe mit Rechtsaktion* genannt, wenn

- (1) G^r ist eine Lie-Gruppe,
- (2) X^n ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,
- (3) $(x, g) \in X^n \times G^r \mapsto xg \in X^n$ ist eine differenzierbare Abbildung,
- (4) für alle $g \in G^r$ ist die Abbildung $r_g : x \in X^n \mapsto r_g(x) = xg \in X^n$ ein Diffeomorphismus von X^n auf sich selbst, und $r_{gh} = r_h \circ r_g$.

Analog definiert man eine Transformationsgruppe mit Linksaktion über die Eigenschaften

- (1) G^r ist eine Lie-Gruppe,
- (2) X^n ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,
- (3') $(g, x) \in G^r \times X^n \mapsto gx \in X^n$ ist eine differenzierbare Abbildung,
- (4') für alle $g \in G^r$ ist die Abbildung $\ell_g : x \in X^n \mapsto \ell_g(x) = gx \in X^n$ ein Diffeomorphismus von X^n auf sich selbst, und $\ell_{gh} = \ell_g \circ \ell_h$.

Freie Aktion. Wir sagen, dass G *frei* (oder *effektiv*) auf X operiert, wenn $r_g x = x$ für einige x (oder für alle $x \in X$) impliziert, dass $g = e$ ist.

Die freie Aktion einer Lie-Gruppe G ist in der Theorie der Faserbündel sehr wichtig, da sie die folgende Konsequenz hat: Die Tangentialräume zu den Fasern des Prinzipalbündels sind dann nämlich isomorph zu der Lie-Alebra der Strukturgruppe.

Ein-Parameter-Transformationsgruppen. Wir sprechen von einer (lokalen) *Ein-Parameter-Transformationsgruppe* auf X , wenn es eine Abbildung der Form $I \times X \rightarrow X$, $I \subset \mathbb{R}^1$, gibt,

$$(t, p) \in I \times X \mapsto \varphi_t(p) \in X,$$

so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Für alle $t \in I$ ist $\varphi_t : p \mapsto \varphi_t(p)$ ein Diffeomorphismus von X auf sich selbst,
- (2) Für alle $t, s \in I$ und alle $p \in X$ ist $\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$.

Für jedes $p \in X$ erzeugt jede Ein-Parameter-Transformationsgruppe eine Kurve in X , die der *Orbit* durch p genannt wird. Dies induziert auch ein Vektorfeld auf X , das aus den Tangentialvektoren zum Orbit durch p besteht. Umgekehrt ergibt ein Vektorfeld eine Ein-Parameter-Transformationsgruppe, wenn die Vektoren des Vektorfeldes an jedem Punkt als Tangentialvektoren zu einem Orbit interpretiert werden. Insbesondere erzeugen die Elemente einer Lie-Algebra jeweils Ein-Parameter-Transformationsgruppen der Lie-Gruppe selbst. Die Ein-Parameter-Untergruppen einer Lie-Transformationsgruppe, die von den Elementen von \mathfrak{g} erzeugt werden, bilden Orbits auf X und somit Vektorfelder. Das mit $A \in \mathfrak{g}$ assoziierte Vektorfeld auf X wird mit A^* bezeichnet.