FASERBÜNDEL

Wir haben nun genug Definitionen und Konzepte erarbeitet, um endlich die Definition von Prinzipalfaserbündeln und der damit verbundenen Strukturen vornehmen zu können. Lokal sehen Prinzipalfaserbündel wie das direkte Produkt einer Koordinatenumgebung der Basismannigfaltigkeit mit einer Lie-Gruppe. Erst wenn wir globale Aspekte betrachten, erkennen wir, dass die Struktur nicht unbedingt das Produkt zweier Mannigfaltigkeiten ist.

Im folgenden bezeichnet $P(M,G)$ ein Prinzipalfaserbündel über der Basismannigfaltigkeit M und mit der Strukturgruppe G, $T_u(P)$ ist der Tangentialraum von P am Punkt $u \in P$, und $vT_u(P)$ ist der Unterraum von $T_u(P)$, der aus den Vektoren besteht, die die Faser durch u an u berühren.

Prinzipalfaserbündel. Wir nennen (P, M, π, G) ein *Prinzipalfaserbündel* über M mit Strukturgruppe G, wenn

[P1] G frei auf P operiert, d.h., wenn $u \cdot a = u$ für ein $u \in P$, dann ist $a = e \in G$.

[P2] wir für $u_1, u_2 \in P$ dann und nur dann $\pi(u_1) = \pi(u_2)$ haben, wenn es ein $a \in G$ gibt, so dass $u_1 \cdot a = u_2$.

[P3] P lokal trivial über M ist, d.h., für beliebiges $x \in M$ gibt es eine Umgebung U und einen Diffeomorphismus $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, so dass $\psi(u) = (\pi(u), \eta(u))$ mit $\eta(u) \in G$ und $\psi(u \cdot a) = (\pi(u), \eta(u)a)$.

Zusammenhang. Ein *Zusammenhang* Γ in P weist jedem $u \in P$ einen Unterraum $hT_u(P)$ von $T_u(P)$ mit den folgenden Eigenschaften zu:

[Z1] $T_u(P) = vT_u(P) \oplus hT_u(P)$.

[Z2] Die Aktion R_a eines Elementes $a \in G$ auf P induziert eine Abbildung R_{a*} der Tangentialräume von P. Für jedes $u \in P$ haben wir $hT_{ua}(P) = R_{a*}hT_u(P)$.

[Z3] $hT_u(P)$ hängst glatt von u ab.

Übergangsfunktionen. Ist ein Prinzipalfaserbündel gegeben, so können wir aus den lokalen Diffeomorphismen $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ die so genannten *Übergangsfunktionen* $\psi_{\beta\alpha}(\pi(u))$ bilden, u ein Punkt des gesamten Bündelraumes P. Diese Übergangsfunktionen sind Abbildungen von der Basismannigfaltigkeit M in die Strukturgruppe G. Sie haben eine wichtige Bedeutung für die Konstruierbarkeit von Prinzipalfaserbündeln.

So bildet ψ_α das Urbild $\pi^{-1}(U_\alpha)$ diffeomorph auf $U_\alpha \times G$ in der folgenden Weise ab: $u \in P$ ergibt $(\pi(u), \varphi_\alpha(u)) \in U_\alpha \times G$, wobei $\varphi_\alpha(u) \in G$ ist. Nach Definition hat φ_α die Eigenschaft, dass $\varphi_\alpha(ua) = \varphi_\alpha(u)a$ für $a \in G$. Für $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ haben wir

$$\varphi_\beta(ua)(\varphi_\alpha(ua))^{-1} = \varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1} .$$

Das zeigt, dass $\psi_{\beta\alpha} \equiv \varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$ in der Tat nur von $\pi(u)$ abhängt, und nicht von dem Element der Faser $\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(\pi(u))$. Also sind die Übergangsfunktionen Abbildungen, die auf $U_\alpha \cap U_\beta$ definiert sind, und die Eigenschaft

$$\psi_{\gamma\alpha}(x) = \psi_{\gamma\beta}(x) \cdot \psi_{\beta\alpha}(x) \tag{1}$$

für $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ besitzen.

KONSTRUKTION

Wir wollen nun das Prinzipalfaserbündel konstruieren: Sei M eine Mannigfaltigkeit im Überdeckung (U_α) durch offene Mengen U_α. Sei G eine Lie-Gruppe. Wenn für jede Schnittmenge $U_\alpha \cap U_\beta$ Abbildungen $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ mit der Eigenschaft (1) existieren, dann ist es möglich, das Prinzipalfaserbündel $P(M,G)$ mit diesen Abbildungen als Übergangsfunktionen zu konstruieren.

Diese Konstruktion ist nichts anderes als das Zusammenkleben von Produktmannigfaltigkeiten zu einem Bündelraum. Seien zwei Produkte $U_\alpha \times G$ und $U_\beta \times G$ gegeben. Dann sind $(x, a) \in U_\alpha \times G$ und $(y, b) \in U_\beta \times G$ nach Definition äquivalent, wenn $x = y$ und $b = \psi_{\beta\alpha}a$. Sei nun

$$X = \bigcup_\alpha (U_\alpha \times G)$$

die disjunkte Vereinigung der Produkte $U_\alpha \times G$. Das Prinzipalfaserbündel P, das wir konstruieren wollen, ist dann die Menge der Äquivalenzklassen von im obigen Sinne äquivalenten Elementen. Würde G allein aus dem Einselement e bestehen, d.h., $\psi_{\beta\alpha}(x) = e$, dann würden wir nach dem Zusammenkleben der Bilder der Äquivalenzklassen ein globales Produktbündel erhalten.

In der Physik interessiert man sich oft dafür, ob ein Prinzipalfaserbündel reduziert werden kann, also ob man zu einer Untergruppe der Strukturgruppe übergehen kann. Dafür benötigen wir das Konzept von Homomorphismen zwischen Prinzipalfaserbündeln.

Prinzipalfaserbündelhomomorphismen. Ein Homomorphismus f von einem Prinzipalfaserbündel $P'(M', G')$ in ein Prinzipalfaserbündel $P(M, G)$ besteht aus einer Abbildung $f' : P' \to P$ und einem Homomorphismus $f'' : G' \to G$ mit

$$f'(u'a') = f'(u')f''(a') \quad \forall u' \in P', a' \in G' .$$

Dieser Bündelhomomorphismus bildet Fasern auf Fasern ab, so dass er auch eine Abbildung $M' \to M$ induziert, die ebenfalls mit f bezeichnet wird.

Reduktion I. Im Fall, dass $M' = M$ ist, ist f'' eine Injektion von G' auf in G, und die induzierte Abbildung $f : M' \to M$ ist die Identität. Wir nennnen $f : P'(M', G') \to P(M, G)$ die *Reduktion* der Strukturgruppe G auf die Untergruppe G'. Das Prinzipalfaserbündel $P'(M', G')$ heißst das *reduzierte Bündel*.

Die Strukturgruppe G ist reduzierbar auf die Untergruppe G' dann und nur dann, wenn es eine offene Überdeckung (U_α) von M zusammen mit Übergangsfunktionen $\psi_{\beta\alpha}$ gibt, die Werte nur in G' annehmen.

SCHNITTE

Wir benötigen weitere Konzepte, insbesondere das des assoziierten Bündels und das der Schnitte von Bündeln. Wir beginnen mit einem Prinzipalfaserbündel $P(M, .G)$ und eine Mannigfaltigkeit F, auf der G von links operiert. Damit operiert G auf dem Produkt $P \times F$ von rechts, gemäß $(u, \xi, a) \in P \times F \times G \mapsto (ua, a^{-1}\xi) \in P \times F$.

Assoziierte Bündel. Zwei Elemente von $P \times F$ werden als äquivalent betrachtetm wenn es ein Element in G gibt, das die Elemente in $P \times F$ gemäß

$$(u, \xi) \equiv (v, \eta) \Longleftrightarrow \exists a \in G : (v, \eta) = (ua, a^{-1}\xi)$$

verknüpft. Die Menge der Äquivalenzklassen E wird mit $P \times_G F$ bezeichnet. Sie heißt das Faserbündel über M mit Standardfaser F und Strukturgruppe G, das zum Prinzipalfaserbündel P assoziiert ist.

Schnitt. Im allgemeinen ist ein *Schnitt eines Bündels* eine Abbildung $\sigma : M \to E$ so dass $\pi_E \circ \sigma$ in M die Identität ist. Hierbei bezeichnet π_E die Projektion des assoziierten Bündels E auf die Basismannigfaltigkeit M. Wenn (v, ξ) ein Repräsentant eines Elements $A \in E$ ist, dann ist $\pi_E(A) = \pi(u)$ für $u \in P(M, G)$.

Neben globalen Schnitten $\sigma; M \to E$ betrachtet man auch lokale Schnitte $\sigma_\alpha : U_\alpha \to E$. Wenn ein Prinzipalfaserbündel einen globalen Schnitt zulässt, dann ist es ein direktes Produktbündel. Das Bündel $E(M, F, G; P)$, das zum Prinzipalfaserbündel $P(M, G)$ assoziiert ist, lässt einen globalen Schnitt zu, wenn M parakompakt und die Standardfaser F diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

Reduktion II. Die Strukturgruppe von $P(M, G)$, G, ist reduzibel zur abgeschlossenen Untergruppe H dann und nur dann, wenn das assoziierte Bündel $E(M, G/H, G, P)$ einen Schnitt $\sigma : M \to E$ zulässt.