Hausübung VII zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK WiSe 2011/12

Prof. Dr. Norbert Dragon

Abgabe 02.12.2011 vor der Plenarübung PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

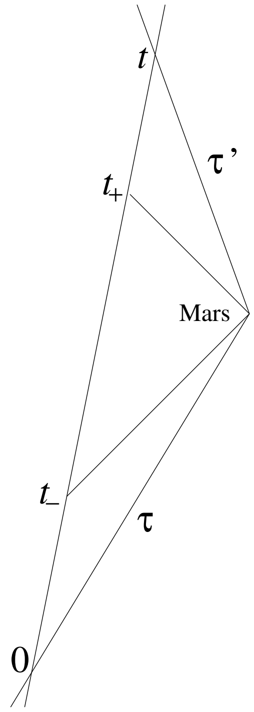
---

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE, ABLEITUNGEN

Mit diesen Übungen können Sie eine grundlegende Eigenschaft in der speziellen Relativitätstheorie und elementare Kenntnisse im Ableiten von Funktionen erarbeiten.

[H22] *Marsreise* **[$1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte]**

Ein Reisender fliegt wie im nebenstehenden Raumzeitdiagramm mit gleichmäßiger Geschwindigkeit von der Erde zum Mars, kehrt bei der Ankunft augenblicklich um und reist mit ebenfalls konstanter Geschwindigkeit zurück. Bestimmen Sie die Dopplerfaktoren



(a) zwischen der Hinreisedauer τ, die auf der Uhr des Reisenden vergeht, und der Zeit t_-, die dem Reisenden auf dem Mars die Uhr eines Stubenhockers anezeigt, der auf der Erde verbleibt;

(b) zwischen der Rückreisedauer τ', die auf der Uhr des Reisenden bei der Rückreise vergeht, und der Zeit $t - t_-$, die er dabei auf der Uhr des Stubenhockers vergehen sieht;

(c) zwischen der Zeit t_+, zu der der Stubenhocker die Marsankunft sieht und der Zeit τ, die er dabei auf der Uhr des Reisenden ablaufen sieht;

(d) zwischen der Zeit $t - t_+$, die für den Stubenhocker vergeht, während er den Reisenden zurückkommen sieht, und der Zeit τ', die er dabei auf der Uhr des Reisenden ablaufen sieht.

Wann sind diese Dopplerfaktoren paarweise gleich? Zeigen Sie mit den Dopplerbeziehungen die Relation

$$t = \frac{1}{2}(\kappa + \kappa^{-1})\tau + \frac{1}{2}(\kappa' + \kappa'^{-1})\tau' > \tau + \tau' .$$

[H23] *Bahnkurven* **[$1 + 1 + 2 = 4$ Punkte]**

Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}$, Beschleunigung $\vec{b}$ und ihr Kreuzprodukt auf den Bahnkurven

(a) $\vec{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, vt)$,

(b) $\vec{r}(t) = (X_0\cos(\omega t + \alpha), Y_0\cos(\omega t + \beta), Z_0\cos(\omega t + \gamma))$.

Sind die Bahnkurven eben, ist also die Richtung von $\vec{v} \times \vec{b}$ konstant?

[H24] *Zykloide* **[$1 + 1 + 2 = 4$ Punkte]**

Die Bahnkurve, die ein Punkt auf dem Rand eines rollenden Rades mit Einheitsdurchmesser beschreibt, heißt Zykloide. Sie lässt sich folgendermaßen angeben:

$$f(y) = f(0) - \sqrt{y(1-y)} + \operatorname{arccot}\sqrt{\frac{1-y}{y}} .$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $g(y) = \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}$ der Zykloide.

(b) Parametrisiert man die Bahnkurve über den Drehwinkel an der Radnabe, so findet man $y = y(\varphi) = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$. Bestimmen Sie $f(y(\varphi))$ sowie $g(y(\varphi))$. *Hinweis*: $\cos\varphi = \cos(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}) = \ldots$

(c) Setzen Sie $f(0) = 0$ und schreiben Sie den Ortsvektor $\begin{pmatrix} f(y(\varphi)) \\ y(\varphi) \end{pmatrix}$ als Summe aus einem Vektor für die Verschiebung der Radnabe (das Rad hat Radius $1/2$) und einem Vektor für die Drehung um die Radnabe. Den zweiten Vektor können Sie ausdrücken als $\frac{1}{2}D(\varphi)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, wobei $D(\varphi)$ eine Drehmatrix ist.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!