**Klausur** zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — WiSe 2011/12

Prof. Dr. Norbert Dragon

10.02.2012, 14-17 Uhr — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Name: ______________________

Matrikelnr.: ______________________

| # | K0 | K1 | K2 | K3 | K4 | K5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pkte | | | | | | | |

**[K0]** *Kurzfragen* **[$1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte]**

Alle Fragen lassen sich in einem Satz oder mit einer Formel beantworten.

(a) Die Matrix $M$ erhalte alle Längen, $|M\vec{x}|^2 = |\vec{x}|^2$. Welche Determinante hat $M$ ?

(b) Was besagt der Flächensatz (zweites Kepler'sches Gesetz)?

(c) Geben Sie den Zusammenhang zwischen Energie $E$ und Impuls $\vec{p}$ eines relativistischen Punktteilchens der Masse $m$ an ($c = 1$).

(d) Eine Uhr bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit vom Ursprung $(0, \vec{0})$ zum Ereignis $(t, \vec{x})$. Welche Zeit ist für die Uhr vergangen?

**[K1]** *Summenkonvention* **[$2 + 1 + 2 = 5$ Punkte]**

Für das $\epsilon$-Symbol gilt

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}\,.$$

Berechnen Sie daraus unter Beachtung der Einstein'schen Summenkonvention

(a) $\epsilon_{ijk}\delta_{kn}\epsilon_{lmn}$,

(b) $\epsilon_{ijk}\delta_{ij}\epsilon_{lmk}$ und

(c) $\epsilon_{imn}\epsilon_{jmn}$.

**[K2]** *Eigenwerte und Eigenvektoren* **[$2 + 2 + 2 = 6$ Punkte]**

Ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse $m$ bewege sich in der $xy$-Ebene unter der Wirkung der Kraft

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} 11/2 & -3/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,.$$

(a) Wie lautet das zugehörige Potential $V(x,y)$ ?

(b) An welchen Orten zeigt die Kraft zum Ursprung?

(c) Wie lauten die Lösungen der Bewegungsgleichungen, die nur solche Orte durchlaufen? *Hinweis*: Die Newton'sche Bewegungsgleichung heißt $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}(t)$ mit $\vec{r} = \binom{x}{y}$.

**[K3]** *Erhaltungssätze* **[$1 + 1 + 2 + 2 = 6$ Punkte]**

Ein Teilchen der Masse $m$ bewegt sich im Potential $V(\vec{x}) = \frac{1}{2}\kappa r^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Warum sind die Energie $E$ und der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten?

(b) Warum ist die Bahn eben?

(c) Geben Sie die Energie und den Drehimpuls in Kugelkoordinaten an. *Hinweis*: $z$-Achse gut wählen!

(d) Kombinieren Sie beide Erhaltungssätze zu einem Energiesatz, in dem nur der Freiheitsgrad $r(t)$ auftritt.

**[K4]** *Kräfte und Potentiale* **[$3 + 2 = 5$ Punkte]**

Prüfen Sie, ob die folgenden Kräfte ein Potential besitzen. Falls ja, berechnen Sie das Potential und skizzieren Sie die Äquipotentiallinien in der $xy$-Ebene, d.h. für $z = 0$.

(a) $\vec{F}(x,y,z) = (\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2}, 0)$,

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (y/z, -x/z, z^2/xy)$

*Hinweis*: $\partial_u \arctan(uv) = \frac{v}{1+u^2v^2}$.

**[K5]** *Arbeit* **[$2 + 2 = 4$ Punkte]**

Ermitteln Sie die bei Verschieben eines Teilchens im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ längs des Weges $\Gamma : \lambda \mapsto \vec{r}(\lambda)$ von $\vec{r}(\underline{\lambda})$ zu $\vec{r}(\overline{\lambda})$ geleistete Arbeit

$$W[\Gamma] = \int_{\underline{\lambda}}^{\overline{\lambda}} \mathrm{d}\lambda\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\lambda))\,.$$

(a) Es sei $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{A} \times \vec{r}$, $\vec{A} = (0, 0, A)$, und $\Gamma$ ein *Halb*kreis im Gegenzeigersinn um den Ursprung in einer Ebene senkrecht zu $\vec{A}$.

(b) Es sei $\vec{F}(\vec{r}) = -\kappa \cdot (x^3 + 2xy^2, y^3 + 2yx^2, 0)$ und $\Gamma$ der stückweise gerade Weg, der von $(-a, -b, 0)$ über $(+a, -b, 0)$ zu $(a, b, 0)$ führt.

*Hinweis*: Es ist sinnvoll, zunächst zu prüfen, ob zur Kraft ein Potential gehört.