
INTEGRALE

Wir üben einige wichtige Integrale, die in der Physik auftreten, besonders das Volumenintegral.

[P32] *Potential*

Wir betrachten noch einmal das Kepler-Problem. Für eine Punktmasse m an der Stelle $\vec{r}\,'$ ist das Potential an der Stelle $\vec{r}$ gegeben durch $V(\vec{r}) = -\frac{G_N m}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$. Für eine kontinuierliche Massenverteilung mit Dichtefunktion $\rho(\vec{r}\,')$ hat man dann das Potential

$$V(\vec{r}) = -\int \mathrm{d}^3 r' \frac{G_N \rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad \text{mit} \quad \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}\,') = M\,,$$

wobei M die Gesamtmasse der Massenverteilung ist. Wir betrachten im folgenden der Einfachheit halber eine kugelförmige Massenverteilung mit Radius R_+ und homogener Dichte

$$\rho(\vec{r}\,') = \begin{cases} \rho_0 & \text{wenn} \quad R_- \le r' \le R_+\,, \\ 0 & \text{wenn} \quad r' < R_- \text{ oder } R_+ < r'\,. \end{cases}$$

(a) Das Problem ist rotationssymmetrisch. Es bieten sich daher sphärische Koordinaten an. Wie lautet $\mathrm{d}^3 r$ in Kugelkoordinaten?

(b) Zeigen Sie für $r > R_+$, dass tatsächlich das Potential $V(r) = -\frac{\alpha M}{r}$ identisch zu dem einer Punktladung mit der Gesamtmasse M ist.

(c) Zeigen Sie für $r < R_-$, dass das Potential $V(r) \equiv 0$ im Innern der Kugelschale verschwindet.

(d) Betrachten Sie die Vollkugel, d.h. $R_- = 0$. Zeigen Sie, dass das Potential im Innern der Massenverteilung, also für $r < R_+$, gegeben ist durch $V(r) = \frac{G_N M}{2R_+}\left(\frac{r^2}{R_+^2} - 3\right)$.

[P33] *Wegintegral*

Berechnen Sie die Weglänge

$$\ell[\Gamma] = \int_{\underline{t}}^{\overline{t}} \mathrm{d}t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

der Bahnkurve $\Gamma : t \mapsto \vec{r}(t) = (a\cos\omega t, a\sin\omega t, \sqrt{1-(a\omega t)^2})$ zwischen $\underline{t} = 0$ und $\overline{t} = 1/(a\omega)$.
Hinweis: Die Ableitung von $\arcsin x$ ist $1/\sqrt{1-x^2}$.