Hausübung V zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — WiSe 2012/13

Prof. Dr. Holger Frahm
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Abgabe 27.11.2012 vor der Vorlesung

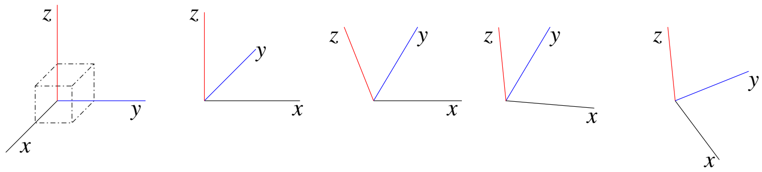
DREHUNGEN UND EIGENWERTPROBLEME

Wir untersuchen das Verhalten physikalischer Systeme unter Drehungen. Bei vielen Systemen kann eine geeignete Drehung die Sache stark vereinfachen, zum Beispiel bei gekoppelten Schwingungen.

[H13] *Verwirrende Drehungen* **[5 Punkte]**

Für ein astronomisches Experiment wurde ein Detektor zur Bestimmung der Richtung $\vec{\eta}$, aus welcher kosmische Teilchenschauer zu sehen sind, in eine Kiste verpackt und nach Mittelamerika verschifft. Im Zielhafen wird eine Testmessung Richtung Polarstern mit dem Resultat $\vec{\eta} = (-2, 0, 1)$ durchgeführt (x-Achse zeigt nach Süden). Kurz darauf zieht ein schwerer Wirbelsturm auf.

Der Detektor wird nacheinander (i) um $\pi/2$ um die z-Achse geschleudert, dann (ii) um α mit $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$ um die neue x-Achse gekippt, weiter (iii) um β ($\sin\beta = 1/9$) um die y-Achse und schließlich (iv) um $\alpha - \pi/2$ um die z-Achse gedreht.



Dabei war die Kiste mit einer Ecke am Ursprung angekettet und hat sich nicht verschoben. Ein Physiker hat jeder Drehung j eine Matrix $D^{(j)}$ zugeordnet und ständig Produkte gebildet.

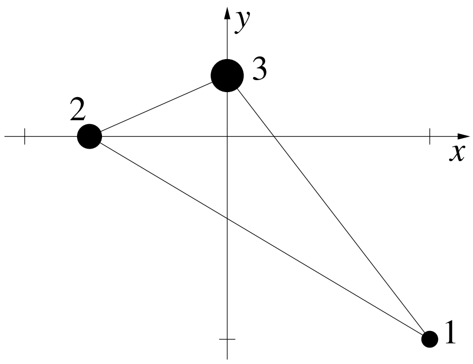
Welche Matrix D vermittelt von der Start- zur Endposition des Kastens? Ist der Test $\det(D) = 1$ erfolgreich? Bestimmen Sie aus der Matrix D einen Vektor $\vec{b}$, dessen Komponenten sich unter der Gesamtdrehung nicht ändern (das ist offensichtlich die Drehachse), sowie $\cos\phi$ und $\sin\phi$ des zugehörigen Winkels ϕ der Gesamtdrehung. Welche Richtungen $\eta, \eta', \eta'', \eta'''$ ergibt die Ortung nach den einzelnen Drehungen? *Hinweise*: Zwischenergebnis nach Drehung (iii): die resultierende Drehmatrix ist $\tilde{D} = D^{(3)}D^{(2)}D^{(1)} = \frac{1}{9\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 20 & -2 \\ -18 & 0 & 9 \\ 4\sqrt{5} & \sqrt{5} & 8\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Nach der letzten Drehung sollte $\eta'''' = (-2, 1, 0)$ sein.

[C2] *Computerübung*: Für die mit MATHEMATICA zu bearbeitenden Teile der folgenden Aufgaben geben Sie bitte einen Ausdruck Ihres MATHEMATICA-Notebooks ab.

[H14 + C2a] *Trägheitstensor* **[(1 + 1 + 1) + (2) = 3 + 2 Punkte]**

Durch masselose Drähte sind drei Kugeln starr miteinander verbunden:

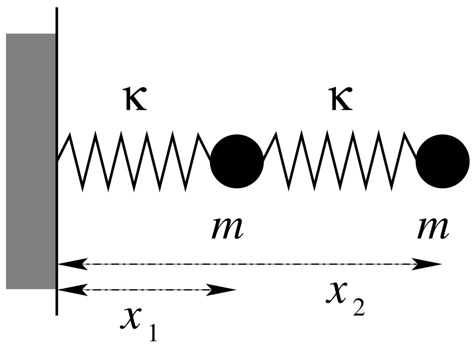
$$\begin{aligned} m_1 &:= m & \text{bei}\quad \vec{r}_1 &= (1, -1, 0)\, a \\ m_2 &= 4m/3 & \text{bei}\quad \vec{r}_2 &= (-3/4, 0, 0)\, a \\ m_3 &= 6m & \text{bei}\quad \vec{r}_3 &= (0, 1/6, 0)\, a \end{aligned}$$



Wo liegt der Schwerpunkt dieses Systems? Welchen Trägheitstensor Θ hat es? Bestimmen Sie mit MATHEMATICA die Haupt-Trägheitsmomente (gemeint sind also die Eigenwerte von Θ). Skizzieren Sie die beiden in der xy-Ebene liegenden Hauptachsen (die mit MATHEMATICA bestimmten Eigenvektoren).

[H15 + C2b] *Normalschwingungen* **[(2 + 2) + (1) = 4 + 1 Punkte]**

Berechnen Sie die Normalfrequenzen und Normalschwingungen des nebenstehend dargestellten Systems. *Hinweis*: Führen Sie zwei Koordinaten ein, $x = x_1$, und $y = x_2$. Wenn Sie die Bewegungsgleichung in $\vec{r} = \binom{x}{y}$ aufstellen, lässt sich diese in Matrixform mit einer 2×2-Matrix $\hat{\Omega}$ schreiben, $\ddot{\vec{r}} = \hat{\Omega}\vec{r}$. Die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen Sie mit MATHEMATICA, lösen Sie damit die Bewegungsgleichungen weiter von Hand.



HINWEIS

Bitte geben Sie immer auf Ihren abgegebenen Lösungen Name, Vorname & Matrikelnummer an!