

DIRAC'SCHE DELTA-DISTRIBUTION

Die Dirac'sche δ -Distribution tritt in der Physik sehr häufig auf, vor allem bei Problemen mit punktförmigen Massen oder Ladungen, oder extrem kurzen Anregungspulsen. Es ist sehr hilfreich, einige Eigenschaften der δ -Distribution zu verstehen.

[P33] *Eigenschaften der δ -Distribution*

Zeigen Sie durch Anwenden auf Testfunktionen

(a)

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x), \quad \text{wobei } \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(x)\delta''(x) = f(0)\delta''(x) - 2f'(0)\delta'(x) + f''(0)\delta(x).$$

(c)

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta(t) \sin(\omega t)) = -\omega^2\theta(t) \sin(\omega t) + \omega\delta(t).$$

[P34] *Die δ -Distribution als Grenzfall*

Zeigen Sie durch Anwenden auf eine Testfunktion $f(x)$, dass gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(tx)}{tx^2} = \pi\delta(x).$$

Hinweis: $\int dx \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi.$