Eingangstest zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — WiSe 2012/13

Prof. Dr. Holger Frahm

19.10.2012 — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

EINGANGSTEST

Dieser kleine Test zur Selbsteinschätzung soll Ihnen (und uns) helfen, möglichst früh eventuell vorhandene Lücken in Ihrem Vorwissen aufzuzeigen. Zu diesem Test wird es im Stud.IP eine Musterlösung geben, anhand der Sie Ihr Vorwissen selbst überprüfen können. Wir werden eine anonyme Umfrage im Stud.IP schalten, so dass wir einen Überblick über das allgemein vorhandene bzw. nicht vorhandene Vorwissen bekommen. Es wäre schön, wenn Sie dann an dieser Umfrage teilnehmen könnten :-)

[T1] *Vektoren*

(a) Bestimmen Sie die Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ mit Hilfe des Skalarproduktes.

(b) In welche Richtung zeigt der Vektor $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})$, wenn $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ senkrecht steht?

(c) Drücken Sie das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ zweier Vektoren allein durch Längenquadrate geeigneter Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.

[T2] *Lineare Gleichungssysteme*

(a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{llll} 2x & +3y & +4z & =5 \\ 3x & +2y & +1z & =5 \\ 2x & -2y & +2z & =0 \end{array}\right.$.

(b) Welche Vektoren $\vec{x}$ im drei-dimensionalen Raum lösen das lineare Gleichungssystem $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{0}$ für einen fest gegebenen Vektor $\vec{a}$?

(c) Auf ein Punktteilchen der Masse m am Ort $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ wirke eine Kraft $\vec{F}(\vec{r})=-m\omega^2\begin{pmatrix}5&-2\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. An welchen Orten zeigt die Kraft zum Ursprung? *Hinweis*: Sie müssen also das lineare Gleichungssystem $\vec{F}=-\lambda\vec{x}$ lösen. Bestimmen Sie zunächst die möglichen Werte von λ.

[T3] *Integrieren und Differenzieren*

(a) Berechnen Sie die Integrale $\int_0^{2\pi}\cos(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{2\pi}\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_0^{2\pi}\cos(x)^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale $\int(2-x^2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, $\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ und $\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$. Geben Sie also die Stammfunktionen an.

(c) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\arctan(y)$, indem Sie ausnutzen, dass nach Definition $\arctan(\tan(x))=x$ ist.

[T4] *Gewöhnliche Differentialgleichungen*

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\alpha f(x)$ für eine reelle Konstante $\alpha>0$.

(b) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $xf'(x)-f(x)=a$ für eine reelle Konstante a. Hierbei bezeichnet $f'(x)$ die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$. *Hinweis*: Setzen Sie für $f(x)$ Potenzen x^n, $n\in\mathbb{N}_0$, ein und überprüfen Sie, für welche n es eine Lösung gibt.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung des ein-dimensionalen harmonischen Oszillators, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)+\omega^2x(t)=0$, wobei $\omega=\sqrt{k/m}$ ist, k die Federkonstante, m die Masse des schwingenden Teilchens. Wie lautet die Lösung konkret für die Anfangsbedingungen $x(0)=1$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\big|_{t=0}=0$?

[T5] *Komplexe Zahlen*

(a) Welchen Betrag hat die komplexe Zahl $z=3+4\mathrm{i}$, wie lautet ihr komplex konjugiertes $\bar{z}$?

(b) Wie lauten Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, wenn $R>0$ und $\varphi\in[0,2\pi)$ sind? Verwenden Sie Ihr Ergebnis, sowie das analoge Ergebnis für das komplex konjugierte $\bar{z}=R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$, um die trigonometrischen Funktionen $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ durch die komplexe Exponentialfunktion auszudrücken.

(c) Wie lauten Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}$, wenn a,b,c,d alle reell sind?