Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Abgabe 28.01.2014 vor der Vorlesung

MEHRDIMENSIONALE INTEGRATION & KRUMMLINIGE KOORDINATEN

Diese Übungen werden noch korrigiert, aber nicht mehr zurück gegeben. Sie können damit Bonuspunkte erwerben und Ihr Konto für die Studienleistung aufbessern. Bitte beachten Sie: Klausurrelevant ist der gesamte Stoff der Vorlesung und damit auch *alle* Übungsaufgaben, die mit Bleistift und Papier gelöst werden können.

[H35*] *Donut* **[4* Punkte]**

Betrachten Sie in der xz-Ebene einen Kreis vom Radius R, dessen Mittelpunkt von der z-Achse den Abstand $a > R$ hat. Durch Rotation dieses Kreises um die z-Achse entsteht ein Torus. Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Torus-Oberfläche, indem Sie die aus der Vorlesung bekannten Formeln anwenden auf die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t,s) \doteq \big((a+R\cos s)\cos t\,,\ (a+R\cos s)\sin t\,,\ R\sin s \big)\,.$$

[H36*] *Krummlinige Koordinaten I* **[1* + 2* + 2* + 1* = 6* Punkte]**

Das Differential $\mathrm{d}\phi(\vec{r})$ eines skalaren Feldes ϕ in zwei Dimensionen lautet

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi &= \vec{\nabla}\phi\cdot\mathrm{d}\vec{r} \\ &= \partial_x\phi\,\mathrm{d}x + \partial_y\phi\,\mathrm{d}y \\ &= \partial_u\phi\,\mathrm{d}u + \partial_v\phi\,\mathrm{d}v\,, \end{aligned} \tag{$*$}$$

wobei einmal $\vec{r} = \vec{r}(x,y)$ und ein andermal $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ verwendet wurde. Wenn die Umrechnung der Koordinaten bekannt ist, $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$, dann hängen die Koordinaten-Differentiale $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ und $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ über die Jacobi-Matrix J zusammen.

(a) Nutzen Sie dies, um auch den Gradienten $(\partial_x\phi, \partial_y\phi)$ durch $(\partial_u\phi, \partial_v\phi)$ auszudrücken. Vorsicht: $(\partial_u\phi, \partial_v\phi) \mathrel{\dot{\neq}} \vec{\nabla}\phi$!

(b) Geben Sie J, $|\det J|$, $G = J^{\mathsf{T}}J$, $(\mathrm{d}s)^2$, $\mathrm{d}A$ und $\vec{\nabla}\phi$ an für Polarkoordinaten
$$(x,y) = (\,r\cos\varphi\,,\ r\sin\varphi\,)\,.$$

(c) Das gleiche, wie in (b), aber nun für parabolische Koordinaten
$$(x,y) = \Big(\,u\,v\,,\ \frac{1}{2}(v^2-u^2)\,\Big)\,.$$

(d) Leiten Sie mit Hilfe von $\partial_u\vec{r} = \vec{e}_u b_u$ und $\partial_v\vec{r} = \vec{e}_v b_v$ auch eine Formel für den Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \vec{e}_x\partial_x + \vec{e}_y\partial_y$ von der Form $\vec{\nabla} = (\vec{e}_u, \vec{e}_v)M\begin{pmatrix}\partial_u\\ \partial_v\end{pmatrix}$ ab. Drücken Sie die Matrix M durch G und (b_u, b_v) aus.

Hinweis: Schreiben Sie die Linearkombinationen in $(*)$ als Zeile mal Spalte und folgern Sie damit $(\partial_x\phi, \partial_y\phi) = (\partial_u\phi, \partial_v\phi)\begin{pmatrix}?&?\\?&?\end{pmatrix}$.

[C9*] *Krummlinige Koordinaten II* **[1* + 1* + 1* + 2* = 5* Punkte]**

Wir betrachten einen Koordinatenwechsel wie in [H36*], aber nun in drei Dimensionen, $(x,y,z) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.

(a) Schreiben Sie eine Prozedur, die die Jacobimatrix J berechnet und ausgibt. Dafür dürfen Sie natürlich nicht die in MATHEMATICA eingebaute Funktion `JacobianMatrix` verwenden.

(b) Schreiben Sie Prozeduren, die für das Koordinatensystem (u,v,w) die Einheitsvektoren $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$ und $\vec{e}_w$ berechnen, sowie Prozeduren, die die Streckfaktoren b_u, b_v und b_w ausgeben.

(c) Betrachten Sie konkret Kugelkoordinaten $(u,v,w) = (r,\vartheta,\varphi)$, also
$$(x,y,z) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$$
Berechnen Sie J, $|\det J|$, $G = J^{\mathsf{T}}J$, $(\mathrm{d}s)^2$, $\mathrm{d}A$.

(d) Programmieren Sie eine allgemeine Prozedur für den Nabla-Operator in krummlinigen Koordinaten und geben Sie damit $\vec{\nabla}$ in Kugelkoordinaten an. *Hinweis*: Zur Überprüfung sei verraten, dass für ein skalares Feld $\phi(\vec{r})$ in drei Dimensionen $\vec{\nabla}\phi = (\partial_r\phi)\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\vartheta}(\partial_\varphi\phi)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}(\partial_\vartheta\phi)\vec{e}_\vartheta$ gilt.

HINWEIS: Name, Vorname, und Matrikelnummer angeben! Lösungen bitte zusammenheften!