Hausübung VII zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — WiSe 2013/14

Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
PD Dr. Michael Flohr

Abgabe 03.12.2013 vor der Vorlesung

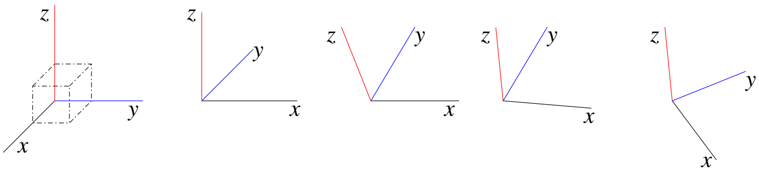
DREHUNGEN UND MATRIZEN

Wie in der Vorlesung erklärt, unterscheiden wir zwischen einem abstrakten Vektor $\vec{a}$ und seinen Komponenten $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^\mathsf{T}$, die von der Wahl der Basis abhängen. Matrizen M wenden wir entweder auf Basisvektoren an ("aktive Transformation" $\vec{e}_i{}' = M_{ik}\vec{e}_k$), oder auf Komponenten ("passive Transformation" $\underline{a}' = M\underline{a}$).

[H17] *Total verdreht I* **[5 Punkte]**

Für ein astronomisches Experiment wurde ein Detektor zur Bestimmung der Richtungen, aus welcher Gammastrahlungsquellen zu sehen sind, mit einer Rakete in den Weltraum geschossen. Am Zielort wird die Richtung $\vec{\eta}$ für die Gammaquelle im Zentrum unserer Galaxis bestimmt. Das Resultat ist, bezogen auf das satelliteneigene Koordinatensystem, $\underline{\eta} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1)^\mathsf{T}$. Kurz darauf wird der Satellit durch einige Manöver so gedreht, dass seine Antennen für den Kontakt zur Erde optimal ausgerichtet sind.

Der Detektor wird nacheinander (1) um $\pi/2$ um die z-Achse gedreht, dann (2) um α mit $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$ um die neue x-Achse gekippt, weiter (3) um β mit $\sin\beta = 1/9$ um die y-Achse und schließlich (4) um $\alpha - \pi/2$ um die z-Achse rotiert.



Als Physiker ordnen wir jeder Drehung (j) eine Matrix $D^{(j)}$ zu und bilden ständig Produkte.

Welche Matrix D vermittelt von der Start- zur Endposition des Satelliten? Ist der Test $\det(D) = 1$ erfolgreich? Bestimmen Sie aus der Matrix D Komponenten $\underline{b}$ mit $|\underline{b}| = 1$, die unter der Gesamtdrehung nicht geändert werden (das ist die Drehachse), sowie $\cos\phi$ und $\sin\phi$ des zugehörigen Winkels ϕ der Gesamtdrehung. Welche Richtungen $\underline{\eta}, \underline{\eta}', \underline{\eta}'', \underline{\eta}'''$ ergibt die Ortung nach den einzelnen Drehungen?

Hinweise: Zwischenergebnis nach Drehung (3): die resultierende Drehmatrix ist

$$\tilde{D} = D^{(3)}D^{(2)}D^{(1)} = \frac{1}{9\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 20 & -2 \\ -18 & 0 & 9 \\ 4\sqrt{5} & \sqrt{5} & 8\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Nach der letzten Drehung sollte $\underline{\eta}'''' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^\mathsf{T}$ sein.

[H18] *Total verdreht II* **[2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte]**

Die *Vereinte Föderation der Planeten* nutzt ein Fixstern-festes interplanetares Koordinatensystem mit Einheitsvektoren $\vec{e}_j$. Neu der Föderation beigetretene Planeten teilen die Drehachse und Winkelgeschwindigkeit ihrer Eigendrehung mit, so auch der Planet Qo'noS. Dazu definieren die Klingonen ein Qo'noS-festes Koordinatensystem $\vec{f}_j$, welches zu $t = 0$ mit dem $\vec{e}_j$-System zusammenfällt, und von dem aus die zeitliche Veränderung der $\underline{e}_j$, also die Spalten einer Drehmatrix D, beobachtet wird. Mit $c = \cos(\omega t)$ und $s = \sin(\omega t)$ erhalten wir in einer verstümmelten[*] Subraum-Übertagung

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c{+}1 & \sqrt{2}s & c{-}1 \\ -\sqrt{2}s & \dots & -\sqrt{2}s \\ c{-}1 & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die fehlenden Daten und berechnen Sie zur Probe $\det(D)$ und $\mathrm{sp}(D)$.

(b) Welche Gestalt nimmt D zu $\omega t = \pi/2$ an?

(c) Der Spezialfall (b) genügt, um Komponenten $\underline{b}$ mit $|\underline{b}| = 1$ zu bestimmen, die die Drehachse angeben. Als Probe überprüfen Sie, ob zu allen Zeiten $\underline{b} = D\underline{b}$ ist.

(d) Zu $\underline{b}$ findet man (mittels grober Skizze) sehr leicht Komponenten $\underline{g}$ mit $\underline{g} \perp \underline{b}$ und $|\underline{g}| = 1$. Überprüfen Sie, dass

$$\underline{b} \cdot (D\underline{g} \times \underline{g}) = \pm\sin(\omega t)$$

ist. Ändern Sie gegebenenfalls das Vorzeichen von $\underline{b}$ so, dass Sie $+\sin(\omega t)$ erhalten. Damit ist dann $\underline{\omega} = \omega\underline{b}$ als Drehachse festgelegt.

(e) Überlegen Sie, wie sich $D = D_0^\mathsf{T}\tilde{D}D_0$ aus einfachen Drehmatrizen zusammensetzen lässt.

---

[*] Die Romulaner versuchen den Frieden zwischen Klingonen und Menschen zu unterminieren.

Bitte wenden!

[C3] *Pauli-Matrizen* **[$1+1+1+1=4$ Punkte]**

Wir betrachten die folgenden drei Matrizen, die in der Physik eine sehr große Rolle spielen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Im folgenden betrachten Sie “i” einfach als eine algebraische Größe, die die interessante Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$ hat. Netterweise kümmert sich MATHEMATICA darum, wenn Sie dort einfach `I` verwenden.

(a) Definieren Sie die drei Matrizen und berechnen Sie alle neun Matrixprodukte $\sigma_i\sigma_j$, $i,j = 1,2,3$, zum Beispiel mit zwei `For`-Schleifen.

(b) Definieren Sie das Kronecker-Symbol δ_{ij} und den Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk}. Dabei dürfen Sie in MATHEMATICA eingebaute Kommandos wie `KroneckerDelta` oder `LeviCivitaTensor` natürlich *nicht* verwenden!

(c) Überzeugen Sie sich, dass die Relationen $\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ gelten.

(d) Überzeugen Sie sich, dass außerdem die Relationen $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gelten.

HINWEIS: Name, Vorname, und Matrikelnummer angeben! Lösungen bitte zusammenheften!

ANKÜNDIGUNG: Die *j*DPG Hannover präsentiert am 10.12.2013 das
“DUELL DER PHYSIKER — Das etwas andere Weihnachtsquiz”.
Professor Haug und Professor Lechtenfeld werden sich um 18 Uhr c.t. im großen Physikhörsaal mit ihren Teams begegnen.