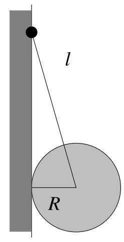
**Zusatztutorium** zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK WiSe 2013/14
Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
03.02.2014 PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

---

## ZUSATZTUTORIUM ZUR KLAUSURVORBEREITUNG

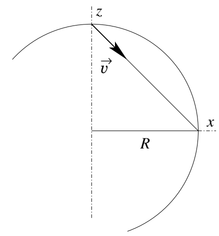
Die folgenden Beispielaufgaben ähneln in Art und Umfang möglichen Klausuraufgaben. Überlegen Sie zunächst für jede Aufgabe, ob Sie eine Idee haben, wie Sie die Aufgaben lösen könnten, was Sie also prinzipiell zu tun hätten. Die praktische Umsetzung der Lösung üben Sie dann später in Ruhe zu Hause.

**[Z1]** *Vektoren*
Ein Hantel mit dem Radius $R$ und der Masse $m$ wird an einem Seil der Länge $\ell$ an die Wand gehängt. Welche Kraft $F$ muss das Seil aushalten? Mit welcher Kraft $K$ drückt die Wand gegen die Hantel?




**[Z2]** *Drehimpuls*
Ein Teilchen der Masse $m$ bewegt sich mit $\vec{r}(t) \doteq (a\cos(\omega t), b\sin(\omega t), 0)$. Welchen Drehimpuls $\vec{L}$ hat das Teilchen? Ist der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten?

**[Z3]** *Bahnkurve*
Es wird eine Bohrung geradlinig vom Nordpol zu einem Zielort am Äquator der Erde vorgenommen. Der Bohrkopf kommt mit konstanter Geschwindigkeit $v$ voran. Für Polarstern-Bewohner dreht sich die Erde mit einer Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ und ist durchsichtig. Welche Bahnkurve $\vec{r}(t)$ ordnen sie dem Bohrkopf zu?




**[Z4]** *Lorenz-Kraft*
Ein geladenes Teilchen mit der Ladung $q$ und der Masse $m$ fliegt in einem homogenen Magentfeld $\vec{B} \doteq (B_1, B_2, B_3)$ und spürt die Erdanziehung, die in die negative $z$-Richtung weist. Wie muss das Magnetfeld gewählt werden, damit das Teilchen stur geradeaus nach rechts, nämlich mit $(v_0, 0, 0)$ die $x$-Achse entlang fliegt?

**[Z5]** *Radioaktiver Zerfall*
Die Anzahl radioaktiver Atome wird durch die Zerfallsrate $\tau^{-1}$ und die Produktaionsrate $\alpha$ bestimmt und genügt der Gleichung $\quad \tau\dot{N} = -N + \tau\alpha t \quad$ mit $\quad N(0) = 0$.
Lösen Sie diese Differentialgleichung mittels Ansatz. Mit welcher $t$-Potenz *beginnt* $N$ zu wachsen? Wie verhält sich die Lösung für große Zeiten $t \gg \tau$? Entspricht die Lösung Ihrer Erwartung für stabile Kerne, d.h., für $\tau \to \infty$?

**[Z6]** *Eigenwerte und Eigenvektoren*
Eine Masse $m$ bewege sich auf einer Ebene mit anisotroper Reibungskraft $\vec{F} \doteq -m\alpha \begin{pmatrix} 2u + 2w \\ 2u + 5w \end{pmatrix}$.
Wie lauten die Hauptachsen? Fertigen Sie eine Skizze an. Wie lautet die Drehmatrix $D$, unter der die Bewegungsgleichung $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$ eine möglichst einfache Gestalt erhält? Die Anfangsgeschwindigkeit sei $(0, v_0)$. Geben Sie hierfür die Lösung $\underline{v}'(t) = (u', w')(t)$ im Hauptachsensystem an.

**[Z7]** *Doppelsternsystem*
Zwei punktförmige Sterne gleicher Masse $M$ ruhen bei $(0, 0, -a)$ und $(0, 0, +a)$ auf der $z$-Achse.
(a) Wie lautet das von ihnen erzeugte Gravitationspotenzial $V(\vec{r})$? *Hinweis*: Superposition!
(b) Mit welcher Kreisfrequenz $\omega$ führt eine Raumsonde der Masse $m$ auf der $x$-Achse kleine harmonische Schwingungen aus? *Hinweis*: $\ddot{x} = -\omega^2 x + \mathcal{O}(x^3)$.
(c) Mit welcher Mindestgeschwindigkeit $v_\infty$ müsste sie den Ursprung durcheilen, um das Doppelstern für immer verlassen zu können? *Hinweis*: Energiesatz!

**[Z8]** *Wegintegral*
Eine Rakete der Masse $m$ soll vom Ursprung entlang der $x$-Achse fliegen. Parametrisieren Sie den Weg so einfach wie möglich. *Gegen* die gravitative Anziehung durch einen Stern der Masse $M$ bei $\vec{r}_0 \doteq (0, a)$ muss die Rakete Arbeit $A$ verrichten. Geben Sie das Kurvenintegral für die Arbeit $A$ an und berechnen Sie es. *Hinweis*: $\partial_t \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = ?$

**[Z9]** *Oberflächenintegral*
Ein unendlich langer geladener Draht entlang der $z$-Achse erzeugt ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$. Berechnen Sie den elektrischen Fluss $\Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E}$ durch ein Rotationsparaboloid der Höhe $H$, gegeben als

$$-H \leq z = h(x, y) = -\alpha(x^2 + y^2) \leq 0 \quad \text{und} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{e}_\rho \quad \text{mit} \quad \vec{e}_\rho = ?$$