**Hausübung XII** zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK WiSe 2014/15

Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Abgabe 20.01.2015 vor der Vorlesung

---

## ERHALTUNGSSÄTZE

Wir lernen, wie die Lösung physikalischer Probleme mit Hilfe von Erhaltungssätzen wesentlich erleichtert wird.

**[H34]** *Gravitation* **[4 + 4 = 8 Punkte]**

Die potentielle Energie eines nichtrelativistischen Teilchens mit Masse $m$ im Gravitationspotential der Erde ist $V(\vec{r}) = -m\, M_{\text{Erde}}\, G_{\text{Newton}} \frac{1}{|\vec{r}|}$.

(a) Wie hängt die Erdbeschleunigung $g_{\text{Erde}}$ damit zusammen?

(b) Warum ist $v_0 = \sqrt{2 g_{\text{Erde}} R_{\text{Erde}}}$ die Fluchtgeschwindigkeit von der Erde?

*Hinweis*: Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz.

**[H35]** *Mathematisches Pendel* **[2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 13 Punkte]**

Wir betrachten das mathematische idealisierte Pendel, bei dem die Masse $m$ in einem Punkt am Ende eines masselosen, unendlich dünnen Fadens angebracht ist.

(a) Welche Symmetrien bewirken beim Fadenpendel, dass die Drehimpulskomponente $L_z$ und die Energie erhalten sind?

(b) Zeigen Sie, dass diese Erhaltungsgrößen in Kugelkoordinaten durch

$$L_z = m\, r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad E = \frac{m}{2}(r^2\, \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2) + m\, g\, r\, \cos\theta$$

gegeben sind.

(c) Eliminieren Sie in $E$ die Variable $\dot{\varphi}$ mit Hilfe der Gleichung für $L_z$. Setzen Sie $M = mr^2$ und fassen Sie $E$ als Summe aus kinetischer und potentieller Energie bezüglich der Variablen $\theta$ auf. Was ergibt sich also für ein Potential? Solch ein Potential wird *effektives Potential* genannt.

(d) Das Fadenpendel durchlaufe eine kreisförmige Bahn mit Winkel $\bar{\theta}$ zur Vertikalen. Wie hängt der Drehimpuls $L_z$ mit $\bar{\theta}$ zusammen? *Hinweis*: Gehen Sie von kleinen Schwingungen um das Minimum des effektiven Potentials bei $\bar{\theta}$ aus. Die Bestimmungsgleichung für dieses Minimum können Sie nach $L_z$ auflösen.

(e) Zeigen Sie, dass für die Kreisfrequenz $\omega$ kleiner Schwingungen um $\bar{\theta}$ die Beziehung

$$\omega^2 = -\frac{g}{r}\left(3\cos\bar{\theta} + \frac{1}{\cos\bar{\theta}}\right)$$

gilt.

**[H36]** *Ellipsenbahn im Keplerproblem* **[3 + 3 + 3 = 9 Punkte]**

(a) Zeigen Sie, dass die Punkte $(x, y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$, die der Gleichung

$$e\, \cos\varphi + 1 = \frac{p}{r}$$

mit konstantem $p > 0$ und konstantem $e$, $0 \leq e < 1$, genügen, eine Ellipse

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bilden.

(b) Berechnen Sie $a$, $b$ und $x_0$ als Funktionen von $e$ und $p$.

(c) Zeigen Sie, dass die Summe der Abstände der Ellipsenpunkte zu den Brennpunkten bei $(0, 0)$ und $(-2\, e\, a, 0)$ konstant ist und $2\, a$ beträgt.

## HINWEIS

**Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!**