MATRIZEN, DREHUNGEN & KREUZPRODUKT

Vektoren und ihre lineare Abbildungen sind in der Physik wichtig. Daher sollen Sie diese Konzepte mit diesen Aufgaben weiter besser kennen lernen.
Hinweis: Möglicherweise werden lineare Abbildungen als Matrizen erst in der Vorlesung am Freitag, 31.10.2014, eingeführt, so dass Sie [H8] und [H9] erst danach bearbeiten sollten.

[H8] *Matrizen* **[$3 + 3 + 2 = 8$ Punkte]**
Matrizen beschreiben linear Abbildungen von Vektoren. Wir wollen hier ein erstes Beispiel studieren.

(a) Multiplizieren Sie Matrizen von der Form

$$r\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass das Ergebnis wieder von dieser Form ist.

(b) Für welches r und welches φ sind die Quadrate solcher Matrizen

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ ?$$

(c) Welche linearen Abbildungen werden durch solche Matrizen wie in (a) beschrieben?

[H9] *Drehungen* **[$2 + 2 + 2 + 2 = 8$ Punkte]**
Untersuchen Sie eine lineare Transformation D, die die Standardbasis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ eines dreidimensionalen Raumes zyklisch vertauscht.

(a) Schreiben Sie die Komponenten von $\vec{a}\,' = D(\vec{a})$ als Produkt einer Matrix D mit den Komponenten von $\vec{a}$.
(b) Zeigen Sie, dass D eine Drehung ist, also Längen unverändert lässt.
(c) Bestimmen Sie einen normierten Vektor $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, den D nicht ändert, $D(\vec{n}) = \vec{n}$.
(d) Geben Sie einen zur Drehachse senkrechten Vektor $\vec{b}$ und sein Transformiertes $\vec{b}\,' = D(\vec{b})$ an. Berechnen Sie mit dem Skalarprodukt $\vec{b}\,' \cdot \vec{b}$ den Drehwinkel.

[H10] *Kreuzprodukt* **[$4 + 4 = 8$ Punkte]**
Zwei kleine Aufgaben mit Kreuzprodukten. Lösen Sie diese am besten in Indexnotation und verwenden Sie die Einsteinsche Summenkonvention.

(a) Zeigen Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$, indem Sie die Komponenten des Kreuzproduktes durch das ε-Symbol ausdrücken.
(b) Welche geometrische Bedeutung hat der Vektor $-\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{a})$, wenn $\vec{e}$ ein Einheitsvektor ist?

[H11] *Lorentzkraft* **[6 Punkte]**
Ein Elektron mit Ladung q bewege sich geradlinig gleichförmig, obwohl es ein konstantes elektrisches Feld $\vec{E} = (E, 0, 0)$ und ein konstantes Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ durchfliegt. Auf das Elektron wirkt also die Lorentzkraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Was kann man nun über die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Elektrons aussagen?

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!