

## MATRIZEN

Lineare Abbildungen eines Vektorraumes werden durch Matrizen beschrieben. Von besonderem Interesse sind lineare Abbildungen des Vektorraumes auf sich selbst, die bestimmte Symmetrien erfüllen.

**[H15] Längenerhaltung** **[3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte]**

Wir betrachten einen zwei-dimensionalen Raum und lineare Abbildungen in Form von Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wir wollen unter allen möglichen Matrizen  $M$  diejenigen finden, die die Länge der Vektoren erhalten. Es soll also gelten:  $|M\vec{x}|^2 = |\vec{x}|^2$ .

- Warum darf sich auch der Winkel zwischen den Basisvektoren nicht ändern?
- Finden Sie Bedingungen an  $a, b, c, d$ , indem Sie beachten, dass die Spalten der Matrix  $M$  die Bilder der Basisvektoren der Standardbasis sind. Verwenden Sie, dass die Längen der Basisvektoren, sowie ihre Orthogonalität, unverändert bleiben sollen.
- Die gefundenen Bedingungen sollten Sie an Relationen trigonometrischer Funktionen denken lassen. Überlegen Sie, wie die Bedingungen erfüllt werden können, in dem Sie für  $a, b, c, d$  in geeigneter Weise möglichst einfache Ausdrücke in  $\cos(\alpha)$  und  $\sin(\alpha)$  einsetzen. Sie sollten zwei verschiedene Möglichkeiten finden, entweder mit Determinante  $+1$ , oder mit Determinante  $-1$ .
- Welche Abbildungen werden also durch die in (c) gefundenen Matrizen beschrieben? Versuchen Sie, die Lösungen  $M'$  mit Determinante  $-1$  aus den Lösungen  $M$  mit Determinante  $+1$  zu erhalten, in dem Sie einen der Basisvektoren zunächst an einer geeigneten Achse spiegeln. Versuchen Sie also  $M' = MS$  zu schreiben und bestimmen Sie die Matrix  $S$ .

**[H16] Spiegelungen und Drehungen** **[3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18 Punkte]**

Wir untersuchen an einem konkreten Beispiel, wie jede Drehspiegelung als eine Drehung um eine Achse  $\vec{n}$  und eine Spiegelung an der zur Drehachse senkrechten Ebene dargestellt werden kann. Wir gehen von folgender Drehspiegelung aus:

$$M = \Pi_{(1,3)} D_{\alpha \vec{e}_z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist offenbar eine Drehung um die  $z$ -Achse mit einer anschließenden Spiegelung, die den ersten und den dritten neuen Basisvektor vertauscht. Wir wollen dies in der Form  $M = P_{\vec{n}} D_{\beta \vec{n}}$  schreiben.

- Berechnen Sie die Determinante von  $\Pi_{(1,3)}$  und überprüfen Sie, dass  $\Pi_{(1,3)}$  ein rechtshändiges in ein linkshändiges Koordinatensystem überführt.
- Bestimmen Sie die Drehachse  $\vec{n}$ . Berechnen Sie dazu  $M = \Pi_{(1,3)} D_{\alpha \vec{e}_z}$  und nutzen Sie aus, dass die Drehachse dieser Drehspiegelung nach Definition in ihr negatives gespiegelt wird. Für die gesuchte Drehachse muss also gelten  $M\vec{n} = -\vec{n}$ . Geben Sie  $\vec{n}$  als normierten Einheitsvektor an.
- Bestimmen Sie die Spiegelebene, in dem Sie  $\vec{n}$  um zwei Vektoren ergänzen, die auf  $\vec{n}$  und auf einander senkrecht stehen. *Hinweis:* Sei  $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3)$ . Dann ist offenbar  $(-n^2, n^1, 0)$  ein Vektor, der auf  $\vec{n}$  senkrecht steht, und der lediglich noch auf Einheitslänge gebracht werden muss. Einen weiteren Vektor, der auf diesen beiden senkrecht steht, finden Sie mit dem Ansatz  $(n^1, n^2, p)$ . Bestimmen Sie  $p$  und bringen Sie auch diesen Vektor auf Einheitslänge.
- Bestimmen Sie nun noch den Drehwinkel  $\beta$ , in dem Sie einen der beiden in (c) bestimmten Vektoren mit  $M$  drehen und dann das Skalarprodukt aus dem ursprünglichen Vektor mit seinem Bild berechnen. *Hinweis:* Zur Bestimmung des Drehwinkels kann natürlich jeder Vektor aus der Ebene senkrecht zur Spiegelachse verwendet werden.
- Zeigen Sie, dass die Ebene senkrecht zur Spiegelachse  $\vec{n}$  durch  $M$  in sich abgebildet wird. Wie sieht die Matrix aus, die  $M$  in der Basis  $\vec{v}$ ,  $(M\vec{v})_{\perp}$  und  $\vec{n}$  darstellt? Hierbei ist  $\vec{v}$  mit  $\vec{v} \perp \vec{n}$ ,  $|\vec{v}| = 1$  ein beliebiger normierter Vektor aus der Ebene senkrecht zur Spiegelachse.
- Betrachten Sie gesondert den Fall  $\alpha \rightarrow \pi$ , also  $\cos \alpha \rightarrow -1$ . Warum ist es schwierig, diesen Fall mit Ihren allgemeinen Ergebnissen zu behandeln?

**Bitte wenden!**

SPIELREGELN ZUR COMPUTERÜBUNG

Die Bearbeitung der Übungsaufgaben erfolgt, wie bei den Hausübungen, allein. Der Lösungsweg soll vollständig mit *Mathematica* ausgeführt und in einem "Notebook" dokumentiert werden. Ein Ausdruck davon ist abzugeben. Zusätzlich schicken Sie Ihr Notebook als Datei per Email an Ihren Tutor. Gegebenfalls müssen Sie Ihre Lösung dann noch in der Präsenzübung vorführen.

Die Computerübungen sind Teil der Studienleistung. Sie müssen *alle* sinnvoll bearbeitet werden. Die Punkte dienen nur als grobe Richtschnur. Ihr Tutor wird Ihnen mitteilen, falls Ihre Lösung noch nachgebessert werden muss.

Die genaue Zeit und der genaue Raum für die Sprechstunde für die Computerübungen wird im Stud.IP bekannt gegeben.

[C1] *Interaktive Parametrische Darstellung einer Funktion* [15 Punkte]

In Hausübung [H6] haben Sie die Bahnkurve eines Lichtstrahls bestimmt, der von einer rotierenden Lichtquelle ausgehend durch eine gradlinig bewegte Lochblende auf einen festen Schirm traf. Mit den Bezeichnungen aus dieser Aufgabe ergibt sich für die Kurve auf dem Schirm in der  $yz$ -Ebene

$$\left( \begin{array}{c} vt \left( 1 + \frac{1}{1 - \frac{r}{a} \cos \omega t} \right) \\ \frac{r \sin \omega t}{1 - \frac{r}{a} \cos \omega t} \end{array} \right).$$

Dies ist eine parametrische Darstellung der Bahnkurve, die Funktion `ParametricPlot` ist dafür geeignet. Stellen Sie die Kurve des Lichtstrahls für Zeiten im Bereich  $0 \leq t \leq 100$  dar. Verwenden Sie die Funktion `Manipulate`, um interaktiv Werte für  $r$ ,  $a$ ,  $v$  und  $\omega$  einstellen zu können. Wählen Sie für diese Parameter sinnvolle Bereiche. Versuchen Sie sicher zu stellen, dass immer  $r < a$  gilt.

[C2] *Überprüfen von Identitäten* [15 Punkte]

Definieren Sie Tabellen  $\delta[[i, j]]$  und  $\varepsilon[[i, j, k]]$  für die Indexbereiche  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$  und weisen Sie den Tabelleneinträgen ihre Werte zu. Sie dürfen dabei *nicht* auf die eingebauten Funktionen `KroneckerDelta` oder `LeviCivitaTensor` oder ähnliches zurückgreifen. Überprüfen Sie in Laufanweisungen die 729 Gleichungen

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jl}\delta_{km}\delta_{in} + \delta_{kl}\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{jl}\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{km}\delta_{jn} - \delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{in},$$

die 81 Gleichungen  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im}$ , die neun Gleichungen  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$ , sowie schließlich  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$ .

HINWEIS

**Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!**