Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
28.-29.10.2014

SKALARPRODUKT, METRIK UND KREUZPRODUKT

In der Vorlesung wurden das Skalarprodukt, die Metrik eines Vektorraumes und das Kreuzprodukt eingeführt. Diese drei Konzepte sollen hier geübt werden.

[P12] *Skalarprodukt*
Zeichnen Sie ein Dreieck mit Kantenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $-(\vec{a}+\vec{b})$. Ergänzen Sie die Zeichnung so, dass der Kosinussatz $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha$ abgelesen werden kann. Berechnen Sie $(\vec{a}+\vec{b})^2$ als Funktion der Komponenten a^i und b^i in einer Orthonormalbasis. Drücken Sie $\cos\alpha$ als Funktion dieser Komponenten aus.

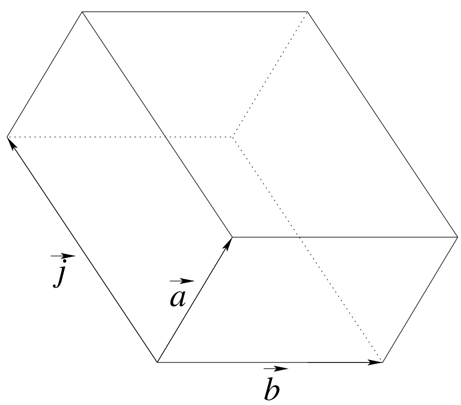
[P13] *Nicht orthogonale Basis*
Betrachten Sie den $\mathbb{R}^3$ mit der Basis

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Metrik $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ für diese Basis. Überzeugen Sie sich, dass die Metrik nicht degeneriert ist, dass also die Vektoren $\vec{e}_i$ in der Tat linear unabhängig sind.
(b) Welche Winkel schließen die Basisvektoren miteinander ein?
(c) Finden Sie die zugehörige kanonische Basis des Dualraums, also die linearen Abbildungen f^i mit $f^i(\vec{e}_j) = \delta^i{}_j$. *Hinweis*: Am besten gibt man Elemente des Dualraumes als Zeilenvektoren an.
(d) Betrachten Sie den Vektor $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. Zu diesem Vektor gibt es ein zugehöriges Element des Dualraums, nämlich die lineare Abbildung $u : \vec{w} \mapsto u(\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{w}$. Geben Sie die Komponenten u_j dieser linearen Abbildung bezüglich der Dualbasis f^j an, indem Sie verwenden, dass einerseits $u(\vec{e}_j) = u_i f^i(\vec{e}_j) = u_i \delta^i{}_j = u_j$ ist, andererseits aber $u(\vec{e}_j) = \vec{u}\cdot\vec{e}_j$ gilt. *Hinweis*: Am einfachsten geht das, wenn Sie $\vec{u}$ in der Standardbasis angeben.
(e) Was ist der Öffnungswinkel des Kreiskegels, der die kartesischen Koordinatenachsen enthält?

[P14] *Drehmoment*
Das Drehmoment ist eine Größe, die durch ein Kreuzprodukt definiert ist. An einem Körper greifen an den Orten $\vec{r}_i$ die Kräfte $\vec{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, an und bewirken das Drehmoment $\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$.
(a) Zeigen Sie, dass $\vec{M}\cdot\sum_i \vec{F}_i$ unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist.
(b) Welche Bedingung müssen die Kräfte erfüllen, damit das Drehmoment $\vec{M}$ unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist?

[P15] *Kreuzprodukt*
Überzeugen Sie sich ganz explizit von einigen wichtigen Eigenschaften des Kreuzproduktes, wie es in der Vorlesung eingeführt wurde.
(a) Es seien $\vec{a} = \vec{e}_1 a^1 + \vec{e}_2 a^2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 b^1 + \vec{e}_2 b^2$ gegeben. Berechnen Sie den Strom $J(\vec{a},\vec{b})$ durch die Fläche $\vec{a}\wedge\vec{b}$ auf zwei Arten explizit: Verwenden Sie einmal zuerst Linearität im ersten Argument, und einmal zuerst Linearität im zweiten Argument. Entwickeln Sie in beiden Fällen $J(\vec{a},\vec{b})$, und zeigen Sie damit, dass in beiden Fällen $J(\vec{a},\vec{b}) = J_{ij} a^i b^j$ gilt. Hierbei ist $J_{ij} = J(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$. Begründen Sie, warum $J(\vec{a},\vec{b}) \;?{=}?\; J_{ii} a^i b^i$ großer Unsinn sein muss.



(b) Vergleichen Sie die Entwicklung in Komponenten für ein symmetrisches $g(\vec{a},\vec{b}) = g(\vec{b},\vec{a})$ und ein antisymmerisches $J(\vec{a},\vec{b}) = -J(\vec{b},\vec{a})$, wobei $\vec{a} = \vec{e}_1 a^1 + \vec{e}_2 a^2 + \vec{e}_3 a^3$, $\vec{b} = \vec{e}_1 b^1 + \vec{e}_2 b^2 + \vec{e}_3 b^3$ sind.
(c) Überzeugen Sie sich mit Ihrem Ergebnis aus (b), dass das Spatprodukt aus $\vec{j}, \vec{a}, \vec{b}$ sich unter zyklischen Vertauschungen nicht ändert. Hierbei ist $j^1 = J_{23}$, $j^2 = J_{31}$ und $j^3 = J_{12}$.