RECHNEN MIT VEKTOREN UND MATRIZEN

Matrizen beschreiben lineare Abbildungen. In diesen Übungen lernen Sie den Umgang mit Matrizen, und studieren einige in der Physik wichtige Beispiele.

[P16] *Pauli-Matrizen*

Wir betrachten die folgenden drei Matrizen, die in der Physik eine große Rolle spielen:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Im folgenden betrachten Sie „i" einfach als eine algebraische Größe, die die interessante Eigenschaft $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$ hat.

(a) Berechnen Sie alle neun Matrixprodukte $\sigma^j \sigma^k$, $j, k = 1, 2, 3$.
(b) Bilden Sie daraus die drei speziellen Kombinationen $\sigma^j \sigma^k - \sigma^k \sigma^j$, $j < k$.
(c) Überzeugen Sie sich, dass in der Tat $\sigma^j \sigma^k - \sigma^k \sigma^j = 2\,\mathrm{i}\,\varepsilon_{jkl}\,\sigma^l$ gilt.
(d) Überzeugen Sie sich, dass außerdem $\sigma^j \sigma^k + \sigma^k \sigma^j = 2\,\delta_{jk} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

Ihre Ergebnisse lassen sich in der folgenden kompakten Formel zusammenfassen:

$$\sigma^j \sigma^k = \delta^{jk}\,\mathbb{1} + \mathrm{i}\,\varepsilon_{jkl}\,\sigma^l, \quad j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

[P17] *Ohne Indexnotation*

Wir betrachten einen Spezialfall von [H10], nämlich $(\vec{a} \times \vec{b})^2$, das Quadrat des Kreuzproduktes.

(a) Multiplizieren Sie $(\vec{a} \times \vec{b})^2$ vollständig aus. Wie viele Terme erhalten Sie?
(b) Multiplizieren Sie $(\vec{a})^2\,(\vec{b})^2$ vollständig aus. Wie viele Terme ergibt dies?
(c) Schreiben Sie $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ vollständig aus. Wie viele Terme sind dies?
(d) Schreiben Sie damit $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ als Identität von Polynomen in a^1, a^2, a^3 und b^1, b^2, b^3.

[P18] *Drehungen*

Eine Drehung $D_{\alpha\vec{n}}$ ist eindeutig durch Angabe einer Drehachse $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, und eines Drehwinkels α bestimmt. Ein beliebiger Vektor $\vec{u}$ lässt sich bezüglich $\vec{n}$ immer schreiben als $\vec{u} = \vec{u}_{\|} + \vec{u}_{\perp}$, wobei $\vec{u}_{\|} = \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{u})$ und $\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{\|}$ ist. Damit ist die Drehung

$$D_{\alpha\vec{n}}\vec{u} = \vec{u}_{\|} + \cos(\alpha)\vec{u}_{\perp} + \sin(\alpha)(\vec{n} \times \vec{u}).$$

(a) Berechnen Sie $D_{\alpha\vec{n}}\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, für die Basisvektoren der Standardbasis.
(b) Wählen Sie

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\,\cos\varphi \\ \sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

und geben damit, und mit den Ergebnissen aus (a), die zur Drehung $D_{\alpha\vec{n}}$ gehörende Matrix an.
(c) Bestätigen Sie, dass $D_{\alpha\vec{n}}\vec{n} = \vec{n}$ die Drehachse nicht ändert.