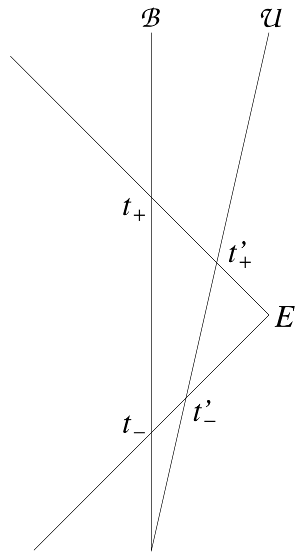
SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE, KOMPLEXE ZAHLEN UND KOMPLEXE VEKTORRÄUME

Wir machen uns die Bedeutung der Dopplerfaktoren klar und üben das Rechnen mit komplexen Zahlen und in komplexen Vektorräumen anhand eines interessanten Beispiels.

[P24] *Dopplerbeziehung*

Betrachten Sie das nebenstehende Diagramm, das zwei gegeneinander bewegte Beobachter $\mathcal{B}$ und $\mathcal{U}$ zeigt, die ein Ereignis E in der t-x-Ebene wahrnehmen.



(a) Lesen Sie aus dem nebenstehenden Raumzeitdiagramm die Dopplerbeziehungen zwischen den Zeiten t'_+ und t_+ sowie t'_- und t_- ab, die die beiden Beobachter dem Ereignis E zuschreiben.

(b) Verwenden Sie die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Dopplerfaktors, $k^2 = (1+v)/(1-v)$, und $t_\pm = t \pm x$ zur Herleitung von

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = L_v \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad L_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an [P22].

(c) Zeigen Sie $L_u \, L_v = L_w$ und bestätigen Sie so für die resultierende Gesamtgeschwindigkeit w das Geschwindigkeitsadditionstheorem.

[P25] $SU(2)$ *und Drehungen*

In dieser Aufgabe machen wir von den Resultaten in [P16] kräftig Gebrauch. Wir betrachten Matrizen

$$U \in SU(2), \quad \text{also} \quad U = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det U = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Hierbei sind $a, b \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Für Vektoren $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$ aus einem zweidimensionalen komplexen Vektorraum definieren wir das Skalarprodukt $\langle u|v\rangle = u^{1*}v^1 + u^{2*}v^2 = \langle v|u\rangle^*$.

(a) Machen Sie sich klar, dass jedem Punkt $P \in S^3$ genau eine $SU(2)$-Matrix U bijektiv zugeordnet werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass $U^\dagger \, U = \mathbb{1}$ ist. Es ist $U^\dagger = (U^\intercal)^*$ das hermitesch konjugierte der Matrix U. Zeigen Sie damit, dass $\langle Uu|Uv\rangle = \langle u|v\rangle$ ist.

(c) Mit den Pauli-Matrizen aus [P16] können wir jedem reellen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ eine Größe $\hat{x}$ wie folgt zuordnen:

$$\vec{x} = x^j \vec{e}_j \quad \mapsto \quad \hat{x} = x^j \sigma^j = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}.$$

Zeigen Sie, dass $(\vec{x} \cdot \vec{\sigma})^\dagger = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ ist. Machen Sie sich klar, dass diese Abbildung reelle Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ und hermitesche spurfreie 2×2 Matrizen bijektiv einander zuordnet.

(d) Zeigen Sie, dass sich *jede* Matrix $U \in SU(2)$ schreiben lässt als $U = U_{\alpha\vec{n}} = \cos\frac{\alpha}{2}\mathbb{1} - \mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$, wobei $\vec{n}$ ein Einheitsvektor ist, $|\vec{n}| = 1$. Jede Matrix $U \in SU(2)$ ist also durch einen Winkel α und eine Drehachse $\vec{n}$ festgelegt, $U = U_{\alpha\vec{n}}$.

(e) Zeigen Sie, dass $U^2 = (U_{\alpha\vec{n}})^2 = \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = U_{2\alpha\vec{n}}$ ist.

(f) Zeigen Sie, dass $\hat{x} \cdot \hat{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}\,\mathbb{1} + \mathrm{i}\,\hat{z}$ mit $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ ist.

(g) Mit den Notationen $\vec{x}_\parallel$ und $\vec{x}_\perp$, $\vec{x} = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp$, aus [P18] seien ebenso $\hat{x}_\parallel$ und $\hat{x}_\perp$ definiert. Zeigen Sie, dass $U\,\hat{x}_\parallel\,U^\dagger = U\,U^\dagger\,\hat{x}_\parallel = \hat{x}_\parallel$ ist.

(h) Betrachten Sie $\hat{x}_\perp \cdot \hat{n}$ und zeigen Sie mit (f), dass $\hat{x}_\perp \cdot \hat{n} = -\hat{n} \cdot \hat{x}_\perp$ ist. Folgern Sie damit, dass $U\,\hat{x}_\perp\,U^\dagger = U^2\,\hat{x}_\perp$ ist.

(i) Setzen Sie alle Resultate zusammen, um abschließend $U\,\hat{x}\,U^\dagger = \widehat{x'}$ mit $\vec{x}\,' = D_{\alpha\vec{n}}\vec{x}$ zu zeigen.