Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
02.-03.12.2014

ABLEITUNGEN

Das Berechnen von Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen gehört zum grundlegenden Handwerkszeug eines jeden Physikers.

[P26] *Ableitungen*

(a) Berechnen Sie aus den Ableitungen von $\sin x$ und $\cos x$ im Bereich $-\pi/2 < x < \pi/2$ die Ableitung von Arcus tangens $\arctan$. Es ist $\arctan(\tan x) = x$ mit $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

(b) Bestimmen Sie durch wiederholtes Ableiten die Potenzreihe der Funktion $(1+x)^\alpha$ als Reihe in x. Welche Reihe ist $1/(1-x)$?

[P27] *Kugelkoordinaten*

Wir betrachten die Kugelkoordinaten, definiert wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{rcl} r &=& \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &=& \arctan(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \varphi &=& \arctan(y/x) \end{array} .$$

(a) Skizzieren Sie ein kartesisches Koordinatensystem, einen Ortsvektor $\vec{x}$ darin, sowie die Größen r, θ und φ. Machen Sie sich anhand Ihrer Skizze klar, dass der oben angegebene Zusammenhang zwischen (x, y, z) und (r, θ, φ) besteht.

(b) Berechnen Sie die folgenden Vektoren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Bigg|_{\theta,\varphi=\mathrm{const}} = c_r(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Bigg|_{r,\varphi=\mathrm{const}} = c_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\theta\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Bigg|_{r,\theta=\mathrm{const}} = c_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\varphi\,.$$

Bestimmen Sie dabei die Vorfaktoren c_r, c_θ und c_φ so, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$ Einheitsvektoren sind. Zeichnen Sie diese Vektoren in Ihrer Skizze aus (a) am Punkt (x, y, z) ein.

(c) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$ paarweise senkrecht aufeinander stehen, also eine Orthonormalbasis bilden.

(d) Berechnen Sie den Vektor mit den Komponenten $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i} r \Big|_{\{x^j=\mathrm{const}:j\neq i\}}$, wobei $i = 1, 2, 3$ durchläuft. Drücken Sie ihn als Linearkombination der Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$ aus.

[P25] *$SU(2)$ und Drehungen*

Setzen Sie die Bearbeitung dieser Aufgabe von letzter Woche fort.