

Relativ relativistische Relativitätstheorie<sup>1</sup>

(Abgabe: 31.01.2006)

38. *Lorentz-Transformationen*: Beweisen Sie folgende Eigenschaften mit Hilfe der Index-Notation:

- (a) Das Pseudo-Skalarprodukt auf dem Minkowskiraum ist lorentzinvariant. (1 P.)
- (b) Die [inverse] Metrik  $\eta^{\mu\nu}$  ist invariant unter Lorentz-Transformationen. (1 P.)

Betrachten Sie nun reelle Vektoren  $\mathbf{x} = (x^0, x^1)$  zusammen mit dem Pseudo-Skalarprodukt  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x^0 y^0 - x^1 y^1$ , also eine Raumzeit mit nur einer Raumdimension.

- (c) Bestimmen Sie alle linearen Transformationen  $\mathbf{x}' = \Pi \mathbf{x}$ , die das Skalarprodukt invariant lassen. Die  $\Pi$  sind also hübsche  $2 \times 2$  Matrizen. Welche Arten von linearen Abbildungen können Sie identifizieren? (2 P.)

39. *Der Minkowskiraum*:

- (a) Zeigen Sie anhand von Raumzeitdiagrammen: Wenn zwei Ereignisse durch ein raumartiges [zeitartiges] Intervall getrennt sind, so gibt es ein Bezugssystem, indem diese gleichzeitig [am gleichen Ort] stattfinden. Außerdem gibt es kein Bezugssystem, indem diese am gleichen Ort [gleichzeitig] stattfinden. (2 P.)
- (b) Geben Sie vier lichtartige Vektoren im Minkowskiraum an, die linear unabhängig sind. Gibt es vier solche Vektoren, so dass diese paarweise orthogonal zueinander sind? (1 P.)
- (c) Zeigen Sie, dass die einzigen nicht-raumartigen Vektoren orthogonal zu einem gegebenen lichtartigen Vektor notwendigerweise Vielfache desselben sind. (1 P.)
- (d) Zeigen Sie, dass die Summe zweier Vektoren im Minkowskiraum zeitartig, lichtartig und raumartig sein kann, unabhängig davon, ob die Vektoren selbst zeitartig, lichtartig oder raumartig sind. (1 P.)

40. *Zerfall eines  $\pi^+$ -Mesons*: Nach einer Kernreaktion am Ursprung besitzt ein  $\pi^+$ -Meson die Geschwindigkeit  $v = \frac{4}{5}c$ . In seinem Ruhesystem hat es eine Lebensdauer von  $t'_1 = 2,5 \cdot 10^{-8}$ s, somit ist  $ct'_1 = \frac{15}{2}$ m. Wie weit fliegt das Meson und zu welchem Zeitpunkt zerfällt es im Laborsystem?

*Hinweis*: Skizzieren Sie die Situation. Notieren Sie sich die Werte für  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\gamma = (\sqrt{1 - \beta^2})^{-1}$  sowie  $\beta\gamma$ . Geben Sie die Koordinaten des Mesons zum Zeitpunkt des Zerfalls in seinem Ruhesystem an. Wie sieht die passende Lorentz-Transformation aus? (3 P.)

41. *Scheinbare Überlichtgeschwindigkeit*: Der Quasar 3C273 ( $\rightarrow$  Google) stößt in einer mit der Verbindungslinie Erde-Quasar den Winkel  $\alpha$  einschließenden Richtung Materie aus, deren Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  messbar ist. Die Entfernung der Erde zum Quasar sei  $L$ , so dass  $L\dot{\varphi}$  die Geschwindigkeit quer zur Sichtlinie ergibt, die mit etwa  $7c$  gemessen wird. Fertigen sie eine Skizze an und zeigen Sie, dass die Materie tatsächlich mit  $|v| < c$  ausströmt. Geben Sie Werte für  $\alpha$  und  $v$  an, die zur beschriebenen Situation passen würden.

*Hinweis*: Vergleichen Sie die Lichtlaufzeiten von einem Materiestück zur Erde zum Zeitpunkt  $t_0$  und zu einem späteren Zeitpunkt  $t_0 + dt$ . (4 P.)

<sup>1</sup>“Alles ist relativ!”