

**Präsenzübung**  
am 31.01.2006

In dieser Präsenzübung geht es darum, einige wichtige Konsequenzen der speziellen Relativitätstheorie zu verstehen.

12. *Additionstheorem für Geschwindigkeiten*: Im Folgenden soll die nichttriviale Addition von Geschwindigkeiten in der speziellen Relativitätstheorie hergeleitet werden, die ein Überschreiten der Lichtgeschwindigkeit verhindert.

- (a) Als Vorüberlegung betrachten Sie eine Gerade  $g_1$  durch den Ursprung im  $\mathbb{R}^2$ , der durch die Koordinaten  $(x, y)$  parametrisiert sei. Die Steigung von  $g_1$  sei  $m_1$ . Interpretieren Sie nun diese Gerade als neue  $x$ -Achse eines Koordinatensystems  $(x', y')$ , indem wiederum eine Gerade  $g_2$  mit Steigung  $m'_2$  liegt. Welche Steigung  $m_2$  besitzt  $g_2$  bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems  $(x, y)$ ? Hinweis: Verwenden Sie die Steigungswinkel von  $g_1$  und  $g_2$ .
- (b) Ein System  $\Sigma'$  bewege sich relativ zu einem System  $\Sigma$  mit Geschwindigkeit  $v$ . Ein weiteres System  $\Sigma''$  bewege sich in  $\Sigma'$  parallel mit der Geschwindigkeit  $v'$ . Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich  $\Sigma''$  in  $\Sigma$ ? Finden Sie das Additionstheorem für *parallele* Geschwindigkeiten

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$$

durch zwei sukzessive Lorentztransformationen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus Teil (a). Warum kann die Lichtgeschwindigkeit durch Addition von Relativgeschwindigkeiten nicht überschritten werden?

- (c) Betrachten Sie nun die zugehörigen *Rapidityen*  $\theta$ ,  $\theta'$  und  $\theta''$  mit  $\tanh \theta = \frac{v}{c}$  etc. Wie lautet hier das Additionstheorem, und in welcher Beziehung steht es zu Teil (a)?

13. *Doppler-Effekt*: Licht bewegt sich immer mit Lichtgeschwindigkeit. Dennoch gibt es einen Effekt, wenn man Licht einer Quelle aus zwei relativ zueinander gleichförmig bewegten Inertialsystemen beobachtet: In einem ruhenden Bezugssystem beobachtet man Photonen mit der Energie  $E$  und dem Impuls  $\mathbf{p}$ . Welche Energie der Photonen beobachtet man in einem mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegten Bezugssystem, wenn der von  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{v}$  eingeschlossene Winkel  $\vartheta$  ist? Transformieren Sie dazu den Viererimpuls  $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$  in das bewegte Bezugssystem, und beachten Sie, dass sich dabei nur die Komponente von  $\mathbf{p}$  parallel zu  $\mathbf{v}$  ändert. Drücken Sie den Winkel  $\vartheta$  durch den Winkel  $\vartheta'$  aus, unter dem der bewegte Beobachter den Photonenstrahl sieht. Was ergibt sich für  $\vartheta' = 0$ ,  $\vartheta' = \pi$  und  $\vartheta' = \pi/2$ ? Nähern Sie wenn nötig um  $v \approx c$ .