

7. Übung

(Abgabe: 06.12.2005)

16. *Bewegungsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte:* Trennen Sie die Schrödingergleichung in Differentialgleichungen für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = |\psi|^2$ und die Phase χ der Wellenfunktion $\psi = \sqrt{\rho} e^{i\chi}$, und zeigen Sie auf diese Weise, daß es keine Zeitentwicklungsgleichung für ρ alleine gibt. (6 P.)

17. *Wahrscheinlichkeitsstromdichte in Operatorsprache:* In der Vorlesung wurde die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$J(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)$$

aus der Schrödingergleichung hergeleitet. Begründen Sie, warum man $J(x, t)$ als Erwartungswert eines Operators $K(x) = \frac{1}{2m}(|x\rangle\langle x|P + P|x\rangle\langle x|)$ im Zustand $|\psi\rangle$ interpretieren kann. Vergleichen Sie $K(x)$ mit dem Ausdruck $K(x) = \rho v$ für eine Stromdichte einer klassischen Flüssigkeit aus der Hydrodynamik, wobei ρ die Dichte und v die Geschwindigkeit der Flüssigkeit am Ort x bezeichnet; womit sind ρ und v in der Quantenmechanik zu identifizieren? (+3 P.)

18. *Tunnelgeschwindigkeit:* Für eine Potentialbarriere der Breite $2a$ und Höhe V_0 wurde in Aufgabe 15 bei von links einlaufenden Teilchen eine Tunnellösung der Form

$$\psi(x) = C e^{-\kappa x} + D e^{\kappa x} \quad \text{für } x \in [-a, a]$$

hergeleitet, wobei C und D mit dem Normierungsfaktor F der nach rechts auslaufenden Welle über $C = \frac{F}{2} \left(1 - \frac{ik}{\kappa}\right) e^{\kappa a + ika}$ bzw. $D = \frac{F}{2} \left(1 + \frac{ik}{\kappa}\right) e^{-\kappa a + ika}$ zusammenhängen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ und die Stromdichte $J(x)$ wie in Aufgabe 17; durch Faktorisierung können Sie die Tunnelgeschwindigkeit v ablesen. (6 P.)