Theoretische Physik II
für Lehramtsstudenten
WS 2005/06

Vorlesungen: Michael Flohr
Übungen: Christian Sämann
Übungsleitung: Kirsten Vogeler

---

8. Übung

(Abgabe: 13.12.2005)

19. *Endliche Drehungen*: In den Präsenzübungen haben wir aus endlichen Drehungen Generatoren durch Linearisierung bestimmt. Hier soll nun der umgekehrte Schritt vollzogen werden.

    (a) Begründen Sie mittels Taylorentwicklung die Formel

    $$f(x_0+a) = \mathrm{e}^{a\frac{\partial}{\partial x}} f(x)\Big|_{x=x_0} \ ,$$

    und erklären Sie ausführlich die Bedeutung des Impulsoperators in der Ortsdarstellung.

    (b) Berechnen Sie den Ausdruck $\mathrm{e}^{J_1\varphi_1}$ mit dem aus Präsenzübung 4(d) bekannten Generator

    $$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \qquad \text{(1 P.)}$$

    (Tipp: Was gilt für J_1^2?) Erklären Sie das Ergebnis.

    (c) Berechnen Sie ebenso den Ausdruck $D_\alpha = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}$, wobei $\vec{n}$ ein beliebiger normierter Vektor ist. (Tipp: Wählen Sie $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)^T$. Was gilt für $(\mathrm{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{n})^2$?) Was passiert mit einem zweikomponentigen Vektor, auf den die Matrizen D_0, $D_{2\pi}$ und $D_{4\pi}$ wirken?

    (d) Berechnen und interpretieren Sie den Ausdruck $D_\alpha^T X D_\alpha$ mit $\vec{n} = \vec{e}_y$, wobei $X = x_i\sigma_i$ die in Präsenzübung 5(c) definierte Größe sei. (6 P.)

20. *Kugelflächenfunktionen*: Ähnlich zu den vollständigen Basen orthonormaler Funktionen, die in die verschiedenen Fouriertransformationen eingehen, gibt es eine solche Basis von Funktionen auf der zweidimensionalen Sphäre. Diese Basis ist wesentlich für das Verständnis des Wasserstoffatoms und soll hier hergeleitet werden.

    (a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ in Kugelkoordinaten, indem Sie die Kettenregel anwenden, also z.B.:

    $$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} \ .$$

    (b) Wie lauten die Drehimpulsgeneratoren L_1, L_2 und L_3 sowie der Operator $\vec{L}^2$ in Ortsdarstellung und in Kugelkoordinaten?
    Zwischenergebnisse:

    $$L_3 = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad \text{and} \quad \vec{L}^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \hbar^2\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \hbar^2\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \ . \qquad \text{(2 P.)}$$

    (c) Um gleichzeitige Eigenfunktionen von L_3 und $\vec{L}^2$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\hbar m$ bzw. $\hbar^2 l(l+1)$ zu bestimmen, machen wir den Separationsansatz $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta_{l,m}(\theta)\Phi_{l,m}(\varphi)$. Welche Differentialgleichungen ergeben sich aus den Eigenwertgleichungen? Geben Sie die Lösung für $\Phi_{l,m}(\varphi)$ an.

(d) Zeigen Sie, dass die verbliebene Differentialgleichung für $\Theta_{l,m}(\theta)$ im Spezialfall $l = m$ durch $\Theta_{l,l}(\theta) = \text{const}(\sin\theta)^l$ gelöst wird.

(e) Die *Kugelflächenfunktionen* sind definiert als $Y_{l,m}(\theta,\varphi) := \Theta_{l,m}(\theta,\varphi)\Phi_{l,m}(\varphi)$. Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe des Operators L_- die fehlenden Funktionen $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ mit $-l \leq m < l$ erhalten kann, und berechnen Sie $Y_{l,l-1}(\theta,\varphi)$ (Konstanten spielen keine Rolle). Identifizieren Sie den $\Phi_{l,m}(\varphi)$-Teil der Funktion.

(f) Plotten Sie einige Kugelflächenfunktionen (engl.: *spherical harmonics*) mit Hilfe von Maple oder Mathematica. (12 P.)