

Präsenzübung
am 6.12.2005

4. Motivation der Drehimpulsalgebra:

- (a) Definieren Sie einen naiven Drehimpulsoperator $\hat{J}_i = (\hat{x} \times \hat{p})_i$, und berechnen Sie mittels der Heisenbergschen Vertauschungsrelationen in drei Dimensionen,

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0,$$

den Kommutator $[\hat{J}_1, \hat{J}_2]$.

- (b) Wie kann man aus den Operatoren \hat{J}_i einen Satz von Operatoren \hat{L}_i konstruieren, die die Drehimpulsalgebra

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = i\hbar\hat{L}_3, \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3] = i\hbar\hat{L}_1, \quad [\hat{L}_3, \hat{L}_1] = i\hbar\hat{L}_2, \quad \text{also} \quad [\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

erfüllen?

- (c) Wie lauten die Drehmatrizen in drei Dimensionen für Drehungen um die x, y und z -Achsen um die Winkel $\varphi_1 = \varphi_x, \varphi_2 = \varphi_y$ und $\varphi_3 = \varphi_z$?
- (d) Um Drehungen um kleine Winkel φ_i zu beschreiben, entwickeln wir die Drehmatrizen in φ_i bis zur linearen Ordnung: $D_i = \mathbb{1} + J_i\varphi_i$. Berechnen Sie die J_i sowie einige der Kommutatoren $[J_i, J_j]$. Wie gelangt man von den J_i zur Drehimpulsalgebra?

5. Pauli-Matrizen: Im folgenden wollen wir uns einige Eigenschaften der Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

näher ansehen.

- (a) Was gilt für die Spur, die Determinante, das hermitesch Konjugierte und das Quadrat dieser Matrizen?
- (b) Zeigen Sie, dass $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ gilt. Wie erhält man also aus den Pauli-Matrizen Generatoren L_i der Drehimpulsalgebra $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$?
- (c) Betrachten Sie nun die Größe $X = x_i\sigma_i$. Welche Bedeutung haben die Ausdrücke $-\det(X)$ und $\frac{1}{2}\text{tr}(\sigma_i X)$?
- (d) Bei Interesse: Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Pauli-Matrizen und den Quaternionen (\rightarrow Wikipedia)?

Bitte beachten Sie, dass über einen zweimal auftauchenden Index immer zu summieren ist.