

Präsenzübung
am 13.12.2005

6. *Laplaceoperator in Kugelkoordinaten:* Der Laplaceoperator in Kugelkoordinaten wurde in der Vorlesung bei der quantenmechanischen Behandlung des Wasserstoffatoms benötigt. Obwohl wir ein wenig Vorarbeit schon in Hausübung 20 geleistet haben, soll hier noch einmal die Herleitung vollständig ausgeführt werden¹.

- (a) Zunächst benötigen wir die Basisvektoren für Kugelkoordinaten $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, geschrieben in der Basis der kartesischen Koordinaten $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Wir suchen also z.B. die Komponenten $\vec{e}_r = (e_r^x, e_r^y, e_r^z)^T = e_r^x \vec{e}_x + e_r^y \vec{e}_y + e_r^z \vec{e}_z$. Hierzu muss man lediglich wissen, dass Basisvektoren immer in die Richtung zeigen, in die sich ein Vektor ändert, wenn die entsprechende Koordinate infinitesimal vergrößert wird.
- (b) Normieren Sie die gefundenen Basisvektoren und überprüfen Sie deren paarweise Orthogonalität.
- (c) Machen Sie sich noch einmal bewusst, dass die Komponente v_x eines Vektors \vec{v} , nichts anderes als die Projektion auf den Einheitsvektor \vec{e}_x ist, die wiederum durch $v_x = \vec{v} \cdot \vec{e}_x$ gegeben ist. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass gilt:

$$\nabla_r = \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|^{-1} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \nabla_\theta = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \nabla_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

- (d) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_r$, $\frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_r$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta$ und $\frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi$.
- (e) Berechnen Sie nun $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$.

7. *Harmonischer Oszillator in drei Dimensionen.* Nach dem Wasserstoffatom ist dies das wichtigste dreidimensionale System. An diesem Beispiel werden wir sehen, dass es so etwas wie das Superpositionsprinzip der klassischen Mechanik auch in der Quantenmechanik gibt.

- (a) Verallgemeinern Sie die Ausdrücke für kinetische Energie $\frac{p^2}{2m}$ und Potential $\frac{1}{2}\omega^2 x^2$ derart auf drei Dimensionen, dass diese invariant unter beliebigen Drehungen sind.
- (b) Erheben Sie die Impulse $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ und die Orte $\vec{x} = (x, y, z)^T$ zu quantenmechanischen Operatoren $\hat{p} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)^T$ und $\hat{x} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^T$. Wie lautet die zeitunabhängige Schrödingergleichung in Ortsdarstellung?
- (c) Was ist offensichtlich ein guter Ansatz, um diese Differentialgleichung zu lösen, und somit die Energieeigenzustände zu erhalten?
- (d) Übertragen Sie Ihr Wissen vom eindimensionalen Fall auf diese Situation. Wie lauten (schematisch) die Energieeigenfunktionen und die Energieeigenwerte. Wie steht es um die Entartung der Energieeigenwerte?
- (e) Wie sehen die Operatoren aus, die den eindimensionalen Leiteroperatoren a und a^\dagger entsprechen? Welche Algebra erfüllen sie?
- (f) Wie könnte eine allgemeine Bedingung für ein quantenmechanisches System lauten, so dass man den in (c) gewählten Ansatz wählen kann?

¹gemäß: "Ein Physiker muss in seinem Leben ein Haus gebaut, einen Baum gepflanzt und den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten ausgerechnet haben."