Mic$\hbar$ael Flohr
Andre Fischer
Spezielle Relativitätstheorie
15. Januar 2008

In dieser Präsenzübung geht es darum, einige wichtige Konsequenzen der speziellen Relativitätstheorie zu verstehen.

1. *Additionstheorem für Geschwindigkeiten*: Im Folgenden soll die nichttriviale Addition von Geschwindigkeiten in der speziellen Relativitätstheorie hergeleitet werden, die ein Überschreiten der Lichtgeschwindigkeit verhindert.

   (i) Als Vorüberlegung betrachten Sie eine Gerade g_1 durch den Ursprung im $\mathbb{R}^2$, der durch die Koordinaten (x, y) parametrisiert sei. Die Steigung von g_1 sei m_1. Interpretieren Sie nun diese Gerade als neue x-Achse eines Koordinatensystems (x', y'), indem wiederum eine Gerade g_2 mit Steigung m'_2 liegt. Welche Steigung m_2 besitzt g_2 bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems (x, y) ? Hinweis: Verwenden Sie die Steigungswinkel von g_1 und g_2.

   (ii) Ein System Σ' bewege sich relativ zu einem System Σ mit Geschwindigkeit v. Ein weiteres System Σ'' bewege sich in Σ' parallel mit der Geschwindigkeit v'. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich Σ'' in Σ ? Finden Sie das Additionstheorem für *parallele* Geschwindigkeiten

   $$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$$

   durch zwei sukzessive Lorentztransformationen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus Teil (i). Warum kann die Lichtgeschwindigkeit durch Addition von Relativgeschwindigkeiten nicht überschritten werden?

   (iii) Betrachten Sie nun die zugehörigen *Rapiditäten* θ, θ' und θ'' mit $\tanh\theta = \frac{v}{c}$ etc. Wie lautet hier das Additionstheorem, und in welcher Beziehung steht es zu Teil (i)?

2. *Doppler-Effekt*: Licht bewegt sich immer mit Lichtgeschwindigkeit. Dennoch gibt es einen Effekt, wenn man Licht einer Quelle aus zwei relativ zueinender gleichförmig bewegten Inertialsystemen beobachtet: In einem ruhenden Bezugssystem beobachtet man Photonen mit der Energie E und dem Impuls $\vec{p}$. Welche Energie der Photonen beobachtet man in einem mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten Bezugssystem, wenn der von $\vec{p}$ und $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel ϑ ist? Transformieren Sie dazu den Viererimpuls $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ in das bewegte Bezugssystem, und beachten Sie, dass sich dabei nur die Komponente von $\vec{p}$ parallel zu $\vec{v}$ ändert. Drücken Sie den Winkel ϑ durch den Winkel ϑ' aus, unter dem der bewegte Beobachter den Photonenstrahl sieht. Was ergibt sich für $\vartheta' = 0$, $\vartheta' = \pi$ und $\vartheta' = \pi/2$? Nähern Sie wenn nötig um $v \approx c$.