

Die folgenden Übungen behandeln die Darstellung der Quantenmechanik im Orts- und im Impulsraum. Die Wahl der Darstellung spielt in der Quantenmechanik eine ganz wichtige Rolle. Mit ihr kann man Betrachtungen zum Teilchen-Charakter (Ortsraum) und Betrachtungen zum Wellen-Charakter (Impulsraum) anstellen.

1. *Ebene Wellen*: Wir werden in der Vorlesung später die Schrödinger-Gleichung kennen lernen. Im Vorgriff darauf sei hier folgendes gesagt: Ein freies Teilchen der Masse m und Energie E muss gemäß der Quantenmechanik der Bewegungsgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) = E \Psi(x)$$

genügen. Hierbei beschränken wir uns auf eine Raumdimension. Desweiteren ist \hbar eine Abkürzung für $h/2\pi$. Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\Psi(x)$.

2. *Impulsraum*: Führen Sie den Impulsoperator $P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ein. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von P , indem Sie die resultierende Differentialgleichung $P\Phi(x) = p\Phi(x)$ lösen. Vergleichen Sie diese Lösungen mit den Wellenfunktionen $\Psi(x)$ aus der ersten Aufgabe und bestimmen Sie damit die Energie-Impuls-Relation.

Machen Sie sich nun folgendes klar:

$$P\Phi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x) = \langle x | P | \Phi \rangle,$$

sowie

$$P\Phi(x) = p\Phi(x) = p \langle x | \Phi \rangle.$$

Also gilt auch $P|\Phi\rangle = p|\Phi\rangle$. Hierbei sind die Zustände $|x\rangle$ natürlich die Eigenzustände des Ortsoperators X , der im Ortsraum einfach durch Multiplizieren mit der Koordinaten x wirkt. Beachten Sie jedoch: $X|x'\rangle = x'|x'\rangle$.

3. *Kommutator*: Berechnen Sie den Kommutator $[X, P] = XP - PX$ im Ortsraum. Interpretieren Sie Ihr Resultat hinsichtlich der Möglichkeit, Ort und Impuls eines quantenmechanischen Teilchens gleichzeitig zu bestimmen. Dazu dürfen Sie sich vorstellen, dass $XP|\psi\rangle$ dafür steht, zunächst den Impuls, und sodann den Ort am Zustand $|\psi\rangle$ zu messen; bei $PX|\psi\rangle$ ist es genau umgekehrt. Wieso ist es nicht möglich, zwei Operatoren gleichzeitig zu diagonalisieren, wenn diese nicht miteinander kommutieren?