Mic$\hbar$ael Flohr
Andre Fischer
Resonanzen und Tunneleffekt
Abgabe: 16. November 2007

Die folgenden Übungen behandeln zwei wichtige Phänomene der Quantenphysik: Resonanzen und den Tunneleffekt.

1. *Resonanz*: In Aufgabe H IV:1:(viii) wurde folgender Ausdruck für die Transmissionsamplitude im Falle eines Potentialtopfes der Tiefe $-V_0$ hergeleitet:

$$S(E) = \frac{F}{A} = \frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}ka}}{\cos 2qa - (\mathrm{i}/2)((q/k) + (k/q))\sin 2qa}\,.$$

Dabei bezeichnen A und F die Koeffizienten der rechtslaufenden ebenen Wellen vor und hinter dem Potentialtopf, $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $q = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$ die Wellenzahlen der ebenen Wellen vor und über dem Potentialtopf und $2a$ die Breite des Potentialtopfes. In dieser Aufgabe wollen wir eine wesentliche Eigenschaft des Transmissionskoeffizienten $|S(E)|^2$ herausarbeiten: Für bestimmte Energien ist der Potentialtopf völlig durchlässig, $|S(E)|^2 = 1$. Diese Maxima von $|S(E)|^2$ heißen Resonanzen; sie spielen in der Kern- und Teilchenphysik eine große Rolle.

(i) Zeigen Sie folgenden Ausdruck für die Transmissionswahrscheinlichkeit:

$$|S(E)|^2 = \frac{1}{1 + (1/4)((q/k) - (k/q))^2 \sin^2(2qa)}\,.$$ **[2P]**

(ii) Folgern Sie, daß gilt:

$$|S(E)\frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\Big)\sin 2qa|^2 = 1 - |S(E)|^2\,.$$

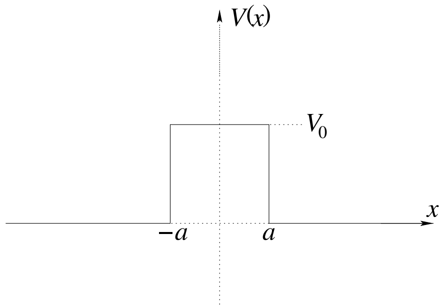
Die linke Seite ist positiv, also nimmt $|S(E)|^2$ nur Werte im Intervall $[0,1]$ an. Die Transmission wird 1 und damit maximal bei den Nullstellen von $\sin 2qa$, also für

$$2qa = n\pi\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Vergleichen Sie die zugehörige Energie $E = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} - V_0$ (bei denen das Potential also vollkommen durchlässig ist) mit den Energie-Eigenwerten des unendlich tiefen Potentialtopfes aus der Präsenzübungsaufgabe P IV. **[2P]**

2. *Tunneleffekt*: Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } |x| \le a\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



mit $V_0 > 0$. Der Hamilton-Operator dieses Systems ist $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$. Im folgenden untersuchen wir Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für $E < V_0$. Ein klassisches Teilchen würde in diesem Fall von der Barriere vollkommen reflektiert. Im quantenmechanischen Fall jedoch gibt es eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen durch die Potentialbarriere „hindurchtunnelt". Die Lösung verläuft weitgehend analog zu Aufgabe H IV:(v)-(viii) mit $q = \mathrm{i}\kappa$.

(i) Bestätigen Sie, daß mit zunächst unbestimmten Koeffizienten $A, \ldots, G$ die Funktion

$$\psi(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & \text{für } x < -a\,, \\ C\mathrm{e}^{-\kappa x} + D\mathrm{e}^{\kappa x} & \text{für } -a < x < a\,, \\ F\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + G\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & \text{für } x > a\,. \end{cases}$$

eine Lösung der Schrödingergleichung ist. Überlegen Sie, wie k und κ mit E und V_0 zusammenhängen? **[2P]**

(ii) Finden Sie die Anschlußbedingung bei $x = -a$ in Matrixform. Bestimmen Sie ebenso die Anschlußbedingung bei $x = a$, wie hängen A und B mit F und G zusammen? **[5P]**

(iii) Im Fall eines von links einlaufenden Teilchens mit $G = 0$ definiert man analog zum Potentialtopf die Transmissionsamplitude $S(E) := \frac{F}{A}$. Zeigen Sie, daß im Grenzfall $\kappa a \gg 1$ einer sehr hohen und breiten Barriere der Durchlässigkeitskoeffizient $|S(E)|^2$ durch

$$|S(E)|^2 \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left\{ -4\sqrt{2m(V_0 - E)}\frac{a}{\hbar}\right\}$$

angenähert werden kann. Im Gegensatz zum klassischen Fall finden wir also auch für $E < V_0$ eine endliche Durchgangswahrscheinlichkeit. **[3P]**