

In dieser Übung geht es darum, besser zu verstehen, wie quantenmechanische Systeme behandelt werden können, bei denen mehrere Quantenzahlen auftreten, oder die aus mehreren, identifizierbaren Teilchen zusammengesetzt sind. Zum Beispiel können wir uns leicht Systeme vorstellen, die aus zwei Teilchen bestehen, deren Eigenschaften *getrennt* gemessen werden können. Dann ist der Hilbertraum \mathcal{H} des Gesamtsystems der Produktraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Seine Zustände sind endliche Linearkombinationen von Paaren $|u\rangle \otimes |v\rangle$ mit $|u\rangle \in \mathcal{H}_1$ und $|v\rangle \in \mathcal{H}_2$. Es gilt weiter für $|u'\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|v'\rangle \in \mathcal{H}_2$ und $c \in \mathbb{C}$, dass

$$|cu + u'\rangle \otimes |v\rangle = c|u\rangle \otimes |v\rangle + |u'\rangle \otimes |v\rangle, \quad |u\rangle \otimes |cv + v'\rangle = c|u\rangle \otimes |v\rangle + |u\rangle \otimes |v'\rangle.$$

Außerdem faktorisiert das Skalarprodukt, also

$$\langle u' \otimes v' | u \otimes v \rangle \equiv (\langle u' | \otimes \langle v' |)(|u\rangle \otimes |v\rangle) = \langle u' | u \rangle \langle v' | v \rangle.$$

1. *Produktraum*: Wir wollen einige Eigenschaften von Zuständen aus Produkträumen verstehen. Seien $|\phi_i\rangle$ eine Orthonormalbasis in \mathcal{H}_1 und $|\chi_j\rangle$ eine Orthonormalbasis in \mathcal{H}_2 .

- (a) Zeigen Sie, dass dann $|\phi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$ eine Orthonormalbasis in \mathcal{H} ist. Damit hat ein beliebiger Zustand eine Entwicklung $|\Psi\rangle = \sum_{i,j} \psi_{ij} |\phi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$ mit den Komponenten-Koeffizienten $\psi_{ij} = (\langle \phi_i | \otimes \langle \chi_j |) |\Psi\rangle = \langle \phi_i \otimes \chi_j | \Psi \rangle$. **[2P]**
- (b) Zeigen Sie, dass die Komponenten ψ_{ij} zwei Abbildungen $N : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ und $N^\dagger : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ definieren, indem Sie die Wirkung von $\sum_{i,j} |\phi_i\rangle \psi_{ij} \langle \chi_j |$ auf einen Zustand $|v\rangle = \sum_j v_j |\chi_j\rangle \in \mathcal{H}_2$ und analog die Wirkung von $\sum_{i,j} |\chi_j\rangle \psi_{ij}^* \langle \phi_i |$ auf einen Zustand $|u\rangle = \sum_i u_i |\phi_i\rangle \in \mathcal{H}_1$ betrachten. Hängen diese Abbildungen von den gewählten Basen ab? **[2P]**
- (c) Zeigen Sie, dass $N^\dagger N : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ hermitesch ist. Es seien $|V_n\rangle$ die Eigenvektoren von $N^\dagger N$ mit Eigenwerten λ_n^2 , also $N^\dagger N |V_n\rangle = \lambda_n^2 |V_n\rangle$. Man kann annehmen, dass die $|V_n\rangle$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H}_2 bilden, ansonsten kann man sie zu einer Basis ergänzen, indem linear unabhängige Vektoren hinzugenommen werden. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte nicht negativ sind. Sei nun $\lambda_n^2 > 0$ und dann werden mit $N |V_n\rangle = |\lambda_n| |U_n\rangle$ normierte Vektoren $|U_n\rangle \in \mathcal{H}_1$ definiert. Zeigen Sie, dass auch die $|U_n\rangle$ orthonormal sind. Sollten sie nicht ganz \mathcal{H}_1 aufspannen, so denken wir uns diese ergänzt zu einer Orthonormalbasis von \mathcal{H}_1 . **[2P]**
- (d) Jeder normierte Zustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ definiert also eine Orthonormalbasis $|U_m\rangle \in \mathcal{H}_1$ und eine Orthonormalbasis $|V_n\rangle \in \mathcal{H}_2$. Wie lauten nun die Komponenten ψ_{mn} mit diesen neuen Basen? Schreiben Sie $|\Psi\rangle$ explizit in dieser Basis aus. Diese Darstellung eines normierten Vektors in einem Produktraum, $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ heißt *Schmidt-Zerlegung*. **[2P]**
- (e) Nehmen Sie an, dass sich die Komponenten ψ_{ij} als Produkte $a_i b_j$ schreiben lassen. Welchen Rang hat dann $(\psi)_{ij}$, aufgefasst als Matrix? Interpretieren Sie dabei den Index i als Zeilen-, j als Spalteneintrag. Verwenden Sie die Definition $\text{rank}(\psi) := \dim(\text{Image}(\psi))$ oder äquivalent den Zeilenrang von ψ . Begründen Sie, dass $(\psi)_{ij}$ genau dann Rang eins hat, wenn $|\Psi\rangle = (\sum_i a_i |\phi_i\rangle) \otimes (\sum_j b_j |\chi_j\rangle)$ ein Produktzustand ist. **[2P]**
- (f) Für diese Aufgabe nehmen wir an, dass die in (c) eingeführten $|V_n\rangle$ und $|U_n\rangle$ eine vollständige Basis von \mathcal{H}_2 bzw. \mathcal{H}_1 bilden. Insbesondere heisst dies, dass vorausgesetzt wird, dass

$\lambda_n^2 > 0 \forall n$. Zustände, deren Schmidt-Zerlegung aus mehreren Termen bestehen, heißen *verschränkte* Zustände. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$S(|\Psi\rangle) = - \sum_n \lambda_n^2 \ln \lambda_n^2$$

nur verschwindet, wenn $|\Psi\rangle$ ein Produktzustand ist, und sonst positiv ist. Hinweis: Betrachten Sie dazu die explizite Form von $|\Psi\rangle$ aus (d), und nutzen Sie aus, dass $|\Psi\rangle$ normiert ist. Diese Funktion verhält sich wie die Entropie. **[2P]**

- (g) Es sei A ein Operator, der einen Messapparat beschreibt, der das erste Teilsystem vermisst, der also \mathcal{H}_1 auf \mathcal{H}_1 abbildet. Analog sei B ein Operator für das zweite Teilsystem. Wie ist die Wirkung $A \otimes B$ auf $|u\rangle \otimes |v\rangle$ erklärt? Mit Linearität folgt damit auch die Wirkung von $A \otimes B$ auf allgemeine Zustände $|\Psi\rangle$. Wie würde ein auf ganz \mathcal{H} definierter Operator zu schreiben sein, der nur das erste Teilsystem vermisst? **[2P]**

2. Unabhängig zusammengesetzte Gemische:

- (a) Motivation: Betrachten Sie zunächst einen reinen Zustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$. Seien $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ mit Eigenzuständen $|\Omega_i\rangle$ und $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ mit Eigenzuständen $|\Gamma_j\rangle$ gegeben. Wie ist $w((i,j), A \otimes B, \Psi)$ definiert? Was muss für $|\Psi\rangle$ gelten damit w faktorisiert, d.h.

$$w((i,j), A \otimes B, \Psi) = w_1(i, A, \Psi_1)w_2(j, B, \Psi_2)$$

für geeignete Zustände $|\Psi_1\rangle$ und $|\Psi_2\rangle$? **[2P]**

- (b) Ein Gemisch ρ eines zusammengesetzten Systems ist unabhängig zusammengesetzt, wenn die Wahrscheinlichkeiten für alle Paare von Messergebnissen von Messungen $A \otimes \mathbb{1}$ am ersten Teilsystem und Messungen $\mathbb{1} \otimes B$ am zweiten Teilsystem faktorisieren,

$$w((i,j), A \otimes B, \rho) = w_1(i, A, \rho_1)w_2(j, B, \rho_2).$$

Überlegen Sie, dass dies dann Sinn macht, wenn dabei

$$w_1(i, A, \rho_1) = \sum_j w((i,j), A \otimes B, \rho), \quad w_2(j, B, \rho_2) = \sum_i w((i,j), A \otimes B, \rho)$$

ist. Was bedeutet das physikalisch? Wenn ein Gemisch nicht unabhängig zusammengesetzt ist, nennen wir die Teilsysteme *verschränkt*. **[2P]**

- (c) Mathematische bedeutet unabhängig zusammengesetzt folgendes: Wahrscheinlichkeiten sind Hauptdiagonalelemente der Dichtematrix, $\langle \Lambda | \rho | \Lambda \rangle$. Sei $|\Lambda\rangle$ ein Eigenzustand von $A \otimes B$. Warum ist dies ein Produktzustand? Die Faktorisierungsbedingung bedeutet für Produktzustände $|u \otimes v\rangle$ dann

$$\langle u \otimes v | \rho | u \otimes v \rangle = \sum_{i,i',j,j'} a_i^* b_j^* \rho_{(i,j),(i',j')} a_{i'} b_{j'} = \left(\sum_{i,i'} a_i^* (\rho_1)_{i,i'} a_{i'} \right) \left(\sum_{j,j'} b_j^* (\rho_2)_{j,j'} b_{j'} \right)$$

Beide Seiten sind Bilinearformen in $|u\rangle$ und $|v\rangle$, und sind nur dann für alle $|u\rangle$ und $|v\rangle$ gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Welche Beziehung gilt also für die Dichtematrizen ρ, ρ_1 und ρ_2 , wenn ρ zu einem unabhängig zusammengesetzten Gemisch gehört? **[2P]**

- (d) Bei verschränkten Systemen kann ein reiner aber verschränkter Zustand gemischt erscheinen, wenn man nur am ersten Teilsystem misst. Betrachten Sie $w_1(i, A, |\Psi\rangle) = \sum_j |\langle \Lambda_i \otimes \chi_j | \Psi \rangle|^2$, wenn $|\Lambda_i\rangle$ die Eigenbasis von A ist. Drücken Sie dies als $\langle \Lambda_i | \rho_1 | \Lambda_i \rangle$ aus und geben Sie ρ_1 in der Basis der Schmidt-Zerlegung an. Finden Sie damit ein Kriterium, wann ρ_1 zu einem reinen Zustand gehört. Welche Eigenschaft muss demnach $|\Psi\rangle$ haben? **[2P]**