
In der folgenden Übung behandeln wir explizit die Konstruktion und das Verhalten eines verschränkten Zustandes. Verschränkte Zustände sind ein Mittel, die Nicht-Lokalität der Quantenmechanik zu demonstrieren.

1. *Spin-Singlet*: Wir betrachten zwei Elektronen, die durch einen Prozess gemeinsam so erzeugt werden, dass sie ein Spin-Singlet bilden. Dies ist ein Zustand, bei dem bei Messung einer Spinkomponente, z.B. der z -Komponente, immer für ein Elektron die entgegengesetzte Ausrichtung wie für das andere gemessen wird. Zeigen Sie explizit, dass der Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \right)$$

unter \vec{S}^2 den Gesamtspin null und unter S_z die Spin-Ausrichtung null hat. Beachten Sie hierzu, dass $\vec{S} = \vec{S}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}_2$ ist.

2. *Identische Fermionen*: Elektronen sind ununterscheidbare Fermionen. Überlegen Sie, warum das Pauli-Prinzip für den Zustand zweier ununterscheidbarer Fermionen die Form

$$|e_1^-, e_2^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1^-\rangle \otimes |e_2^-\rangle - |e_2^-\rangle \otimes |e_1^-\rangle \right)$$

nahelegt.

3. *Nochmal Spin-Singlet*: Die Wahl der Achse für die Spin-Komponente ist vollkommen willkürlich. Wir hätten also $|\Psi\rangle$ also auch mit Eigenzuständen bezüglich der Messung des Spins in der x -Richtung definieren können. Zeigen Sie, dass dies in der Tat auf den selben Zustand führt, in dem Sie die Eigenzustände für die Spin-Komponente in x -Richtung in der Basis der Eigenzustände für die Spin-Komponente in z -Richtung ausdrücken.
4. *Einstein-Podolski-Rosen*: Überlegen Sie nun folgendes: Bei einem Experiment wird an einem der beiden Elektronen eine Messung seines Spins für eine beliebige Achse (z.B. z) vorgenommen. Dies liefert zufällig einen von zwei möglichen Werten. Was weiß man nun darüber, was eine Messung am zweiten Elektron ergeben würde – und zwar einmal für den Fall, dass die selbe Achse gewählt wird, und einmal für den Fall, dass eine dazu senkrechte Achse (z.B. x) gewählt wird.