Mic$\hbar$ael Flohr
Andre Fischer

Identische Teilchen

Abgabe: 14. Dezember 2007

In dieser Übung sollen Sie verstehen, dass die Behandlung identischer Teilchen in der Quantenmechanik zu vielleicht nicht ganz intuitiven Konsequenzen führt.

Dazu nehmen wir der Einfachheit halber das Beispiel, dass wir zwei identische Teilchen haben. Um es noch einfacher zu machen, wollen wir annehmen, dass die beiden Teilchen nicht miteinander wechselwirken. Bei Elektronen würden wir so also die Tatsache vernachlässigen, dass sie sich aufgrund ihrer elektrischen Ladungen abstoßen müssten. Da die Teilchen identisch sind, soll für beide jeweils die selbe Schrödingergleichung gelten,

$$H\Psi(\vec{x}) = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})\right)\Psi(\vec{x}) = E\Psi(\vec{x})\,,$$

beide Teilchen befinden sich also im selben Potential $V(\vec{x})$. Damit wir alles gut auseinander halten können, wollen wir den Hamilton-Operator, der auf das erste Teilchen wirkt, $H^{(1)}$ nennen, denjenigen, der auf Teilchen zwei wirkt, $H^{(2)}$. Beide Teilchen haben dann das selbe Energie-Spektrum an erlaubten Energien. Wir wollen annehmen, dass diese Energien diskret sind. Wir bezeichnen dann die jeweiligen normierten Eigen-Wellenfunktionen mit $\Psi_k^{(i)}$ mit zugehörigen Energie-Eigenwerten $E_k^{(i)}$, $i = 1, 2$ und $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

1. *Gesamter Hamilton-Operator*: Begründen Sie, dass der Hamilton-Operator für zwei identische, nicht miteinander wechselwirkende Teilchen durch $H = H^{(1)} + H^{(2)}$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\Psi_{k,l}(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = \Psi_k^{(1)}(\vec{x}^{(1)})\Psi_l^{(2)}(\vec{x}^{(2)})$ Eigen-Funktionen von H mit Energie-Eigenwerten $E_{k,l} = E_k^{(1)} + E_l^{(2)}$ sind. **[3P]**

2. *Ununterscheidbarkeit*: Wenn zwei Teilchen in der Quantenmechanik identisch sind, so darf es kein Experimentx keine Messung (also auch keinen Operator, keine Observable) geben, das bzw. die diese beiden Teilchen unterscheiden kann. Finden Sie normierte Linerakombinationen
$$\Phi(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = \sum_{k,l} a_{k,l}\Psi_{k,l}(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)})$$
der Eigen-Funktionen aus Aufgabe (1), so dass
$$|\Phi(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)})|^2 = |\Phi(\vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(1)})|^2$$
ist. Tipp: Machen Sie sich klar, dass Φ nur dann eine Eigen-Funktion von H ist, wenn die in der Linearkombionation auftretenden Eigen-Funktionen von H alle den gleichen Energie-Eigenwert haben. Da wir keine Annahmen über die spezielle Form des Energie-Spektrums machen, kann die Lienarkombination nur zwei Terme enthalten, da wir so nur $E_{k,l} = E_{l,k}$ voraussetzen dürfen. Sie sollten auf diese Weise nur zwei mögliche Linerakombinationen Φ erhalten. **[5P]**

3. *Bosonen und Fermionen*: In Aufgabe (2) sollten Sie zwei mögliche Lösungen für Φ gefunden haben, die sich durch ein einziges Vorzeichen von allerdings fundamentaler Bedeutung unterscheiden. Es ist so, dass $|\Phi|^2$ sich unter Vertauschen der beiden Teilchen nicht ändert. Zeigen Sie, dass bei der einen Lösung, die man *vollständig symmetrisch* nennt, auch Φ selbst sich nicht ändert, während bei der anderen Lösung, die man *vollständig antisymmetrisch* nennt, durch Vertauschen der beiden Teilchen Φ in $-\Phi$ übergeht. Was bedeutet das für den Wert von Φ, wenn sich beide Teilchen am selben Ort befinden? Was können Sie über den Fall sagen, wenn $k = l$ ist? **[5P]**

4. *Zusammenfassung*: Diskutieren Sie nun noch einmal in eigenen Worten, wie die Ununterscheidbarkeit von identischen Teilchen zu zwei möglichen *Statistiken* führt, die man bosonisch bzw. fermionisch nennt. Begründen Sie insbesondere, dass bei der fermionischen Statistik das Paulische Ausschließungsprinzip automatisch eingebaut ist. **[3P]**

5. [Bonusaufgabe N *identische Teilchen*: Finden Sie nun auch die entsprechenden normierten Lösungen $\Phi_{\text{symm}}(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(N)})$ und $\Phi_{\text{asymm}}(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(N)})$ für den Fall von N identischen, nicht miteinander wechselwirkenden Teilchen, die vollständig symmetrisch, bzw. vollständig antisymmetrisch unter Vertauschen von je zwei beliebigen Teilchen sind.] **[+10P]**