Anwesenheitsübungen I

21. Oktober bis 23. Oktober

A1.1 *Explizite Addition von Drehimpulsen*

Betrachtet man die Drehimpulse zweier Teilchen, so gibt es zwei vollständige Sätze kommutierender Drehimpulsoperatoren: $(J^{(1)})^2, J_3^{(1)}, (J^{(2)})^2, J_3^{(2)}$ mit der Eigenfunktionsbasis $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ sowie $(J^{(1)})^2, (J^{(2)})^2, J^2, J_3$ mit der Eigenfunktionsbasis $|j_1 j_2 j m\rangle$, wobei $J = J^{(1)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes J^{(2)}$ der Gesamtdrehimpuls ist. Die gegenseitigen Entwicklungs– oder Clebsch/Gordan–Koeffizienten der beiden Basen sind Skalarprodukte der Form $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$.

(1) Zeige, daß die Skalarprodukte nur für $m = m_1 + m_2$ nicht verschwinden.

(2) Warum ist $j_1 + j_2$ das maximale j? Zeige durch Abzählen der Zustände, daß $j \geq |j_1 - j_2|$. Welche möglichen Werte hat die Gesamtdrehimpulsquantenzahl j?

Man kann verlangen, daß bei maximalem m und m_1 der Koeffizient nicht negativ (insbesondere reell) ist: $\langle j_1 j_1 j_2 (j - j_1) | j_1 j_2 j j\rangle \geq 0$.

(3) Zeige, daß die Zustände mit maximalem j und m einfach gegeben sind durch $|j_1 j_2\ j = j_1 + j_2\ m = \pm j\rangle = |j_1 \pm j_1\rangle \otimes |j_2 \pm j_2\rangle$, d.h. der Koeffizient ist gleich 1.

Betrachte speziell die Addition zweier Drehimpulse mit Quantenzahlen $j_1 = j_2 = 1$.

(4) Gehe vom in (3) konstruierten Zustand mit $j = m = 2$ aus und berechne die anderen Zustände mit $j = 2$ durch die Wirkung der Leiteroperatoren.

(5) Finde den Zustand mit $j = m = 1$, indem ein Zustand mit $m = 1$ konstruiert wird, der zum Zustand mit $j = 2$, $m = 1$ orthogonal ist. Verifiziere, daß dieser Zustand tatsächlich den Gesamtdrehimpuls $j = 1$ hat.

(6) Gehe vom in (5) konstruierten Zustand mit $j = m = 1$ aus und berechne die anderen Zustände mit $j = 1$ durch die Wirkung der Leiteroperatoren.

(7) Finde den Zustand mit $j = m = 0$, indem ein Zustand mit $m = 0$ konstruiert wird, der zu den Zuständen mit $j = 2$, $m = 0$ und $j = 1$, $m = 0$ orthogonal ist. Verifiziere, daß dieser Zustand tatsächlich den Gesamtdrehimpuls $j = 0$ hat.

(8) Diskutiere exemplarisch die Symmetrieeigenschaften der Koeffizienten.

A1.2 *Landau–Niveaus*

In der Aufgabe A4 der Klausur zur Theoretischen Physik II wurde der Hamiltonoperator für die Bewegung (in der xy–Ebene) eines Teilchens mit Masse m und Ladung q in einem zeitlich konstanten und räumlich homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ berechnet. Nach der Einführung komplexer Koordinaten $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ mit Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}$ ließen sich Leiteroperatoren

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{z}{2r_0} + 2r_0\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\overline{z}}{2r_0} - 2r_0\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

mit der vom harmonischen Oszillator bekannten Vertauschungsrelation $[a, a^+] = 1$ definieren, wobei $r_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ die magnetische Länge und $\omega = \frac{qB}{mc}$ die Larmorfrequenz ist. Der Hamiltonoperator $H = \hbar\omega(a^+a + aa^+) = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})$ hatte dann ebenfalls Oszillatorform. Ferner galt für den Drehimpuls: $L_3 = \hbar(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}})$.

(1) Definiere

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\overline{z}}{2r_0} + 2r_0 \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2r_0} - 2r_0 \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right)$$

und zeige die Gültigkeit der Oszillatorvertauschungsrelation $[b, b^+] = 1$.

(2) Zeige, daß a, a^+ bzw. b, b^+ wechselseitig kommutieren, d.h. $[a, b] = 0$ usw.

(3) Zeige $L_3 = \hbar(b^+ b - a^+ a)$.

(4) Zeige $a\psi_{0,0} = b\psi_{0,0} = 0$ für $\psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-|z|^2/4r_0^2}$.

(5) Welche Energie und welchen Drehimpuls haben $\psi_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{n!m!}}(b^+)^m (a^+)^n \psi_{0,0}$? Wie hoch ist der Entartungsgrad der Energie?

(6) Welche funktionale Form haben die Zustände $\psi_{n,m}$, insbesondere für $n = 0$?

Hausaufgaben I

Abgabe vom 28. Oktober bis 30. Oktober in den Übungen

H1.1 *Clebsch/Gordan–Koeffizienten, allgemein für* $(j_1) \otimes (j_2)$

(1) Sei $A(j, m) = \sqrt{(j + m)(j - m + 1)}$. Zeige durch Anwenden von $J_\pm$ auf $|j_1 j_2 j m\rangle$:

$$\begin{aligned} A(j,m)\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j (m-1)\rangle &= A(j_1, m_1+1)\langle j_1 (m_1+1) j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle \\ &\quad + A(j_2, m_2+1)\langle j_1 m_1 j_2 (m_2+1) | j_1 j_2 j m\rangle, \\ A(j,m+1)\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j (m+1)\rangle &= A(j_1, m_1)\langle j_1 (m_1-1) j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle \\ &\quad + A(j_2, m_2)\langle j_1 m_1 j_2 (m_2-1) | j_1 j_2 j m\rangle. \end{aligned}$$

(2) Zeige mit der zweiten Rekursionsformel aus (1), daß

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 (j - m_1) | j_1 j_2 j j\rangle &= (-1)^{j_1 - m_1} \langle j_1 j_1 j_2 (j - j_1) | j_1 j_2 j j\rangle \\ &\quad \times \sqrt{\tfrac{(j_1+m_1)!(j_1+j_2-j)!(j_2+j-m_1)!}{(2j_1)!(j_2-j+m_1)!(j_2-j_1+j)!(j_1-m_1)!}}. \end{aligned}$$

(3) Warum ist die Transformationsmatrix zwischen beiden Basen unitär? Folgere

$$\textstyle\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \langle j_1 j_2 j' m | j_1 m_1 j_2 (m - m_1)\rangle \langle j_1 m_1 j_2 (m - m_1) | j_1 j_2 j m\rangle = \delta_{j'j}.$$

(4) Zeige mit (2) und (3) sowie der in A1.1 erwähnten Konvention, daß

$$\langle j_1 j_1 j_2 (j - j_1) | j_1 j_2 j j\rangle = \sqrt{\tfrac{(2j_1)!(2j+1)!}{(j_1+j_2+j+1)!(j_1-j_2+j)!}}.$$

Nutze die aus Binomialkoeffizienten–Additionstheoremen stammende Identität

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\geq -a,\, n\geq -c,\, n\leq b,\, n\leq d} \frac{(a+n)!(b-n)!}{(c+n)!(d-n)!} = \frac{(a+b+1)!(a-c)!(b-d)!}{(c+d)!(a+b-c-d+1)!}.$$

(5) Zeige mit der ersten Rekursionformel aus (1) sowie mit (2) und (4), daß

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle &= \sqrt{\tfrac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!(j_1-m_1)!(j_2-m_2)!(j+m)!}{(j_1+j_2+j+1)!(j_1-j_2+j)!(j_2-j_1+j)!(j_1+m_1)!(j_2+m_2)!(j-m)!}} \\ &\quad \times \delta_{m,m_1+m_2} \textstyle\sum_{n=0}^{j-m} (-1)^{j_1-m_1-n} \binom{j-m}{n} \frac{(j_1+m_1+n)!(j_2+j-m_1-n)!}{(j_1-m_1-n)!(j_2-j+m_1+n)!}. \end{aligned}$$

(6) Vergleiche die Koeffizienten mit denen für $(\ell)\otimes\left(\frac{1}{2}\right)$ aus Theoretische Physik II, H9.1 (Spin–Bahn–Kopplung), $\left(\frac{1}{2}\right)\otimes\left(\frac{1}{2}\right)$ aus Theoretische Physik II, A10.1 (Heliumatom) und dem in A1.1 gerechneten Fall $(1) \otimes (1)$.

(30 Punkte)
