Anwesenheitsübungen X

6. Januar bis 8. Januar

A10.1 *Andere Darstellungen der Diracgleichung*

Die Diracgleichung hat für einen vierkomponentigen Spinor ψ_{D} die Form

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi_{\mathrm{D}} = 0$$

mit den $\gamma-$Matrizen in Standarddarstellung (wobei σ^i die Paulimatrizen sind):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Form der Matrizen ist aber nur eine Wahl, denn erforderlich ist nur

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}.$$

Erfüllen γ^μ diese *Cliffordalgebra*, so auch alle Ähnlichkeitstransformierten $U\gamma^\mu U^{-1}$.

(1) Konstruiere ein $U \in SU(4)$, so daß die zweikomponentigen *Weylspinoren* $\psi, \widehat{\psi}$

$$\begin{pmatrix} 0 & W \\ \widehat{W} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \widehat{\psi} \end{pmatrix} + \frac{mc}{\hbar} \begin{pmatrix} \psi \\ \widehat{\psi} \end{pmatrix} = 0$$

lösen, wenn $\psi_{\mathrm{D}} = U \begin{pmatrix} \psi \\ \widehat{\psi} \end{pmatrix}$ die Diracgleichung löst. $W, \widehat{W}$ sind die *Weyloperatoren*:

$$W = \mathbb{1}\frac{\partial}{\partial x^0} - \vec{\sigma}(\vec{\nabla}), \quad \widehat{W} = -\mathbb{1}\frac{\partial}{\partial x^0} - \vec{\sigma}(\vec{\nabla}).$$

Eine reelle Darstellung geht auf E. Majorana (1937) zurück.

(2) Zeige, daß die Matrix $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^0(\gamma^2 + \mathbb{1})$ unitär ist und daß $U^2 = \mathbb{1}$.

(3) Zeige, daß $D' = UDU$ reell ist und $\psi' = U\psi$ die Gleichung $D'\psi' = \frac{mc}{\hbar}\psi'$ löst, wenn ψ die Diracgleichung $D\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi$ löst, mit dem Diracoperator $D = \mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu$.

A10.2 *Die Weylgleichung*

Die *Poincarégruppe* $\mathcal{P}$ besteht aus Paaren (Λ, a) mit Lorentztransformationen $\Lambda \in \mathcal{L}$ und Translationen $a \in \mathbb{R}^{1,3}$. Sie operiert auf dem Minkowskiraum als $(\Lambda, a)x = \Lambda x + a$.

(1) Zeige $(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1)$ für die Komposition zweier Elemente von $\mathcal{P}$. Wegen dieser Eigenschaft ist $\mathcal{P}$ ein *semidirektes* Produkt $\mathcal{L} \rtimes \mathbb{R}^{1,3}$.

Nun sollen die Darstellungen von $\mathcal{P}$ zum Spin $\frac{1}{2}$ auf dem quantenmechanischen Hilbertraum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{1,3}, \mathbb{C}^2)$ konstruiert werden. Wie bei der Darstellung der Drehgruppe zum Spin $\frac{1}{2}$ gehen wir von der Überlagerungsgruppe aus, hier also $SL(2,\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{R}^{1,3}$. Dabei ist $h : SL(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{L}$ die Überlagerungsabbildung für $\mathcal{L}$ (vgl. H9.1). Wir definieren die Darstellungen ρ und $\widehat{\rho}$ von $SL(2,\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{R}^{1,3}$ zum Spin $\frac{1}{2}$ für $\psi, \widehat{\psi} : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{C}^2$ als

$$(\rho(g,a)\psi)(x) = g\psi(\Lambda^{-1}(x-a)), \quad h(g) = \Lambda \qquad (*)$$

$$(\widehat{\rho}(g,a)\widehat{\psi})(x) = \widehat{g}\,\widehat{\psi}(\Lambda^{-1}(x-a)), \quad h(g) = \Lambda, \quad \widehat{g} = (g^+)^{-1}.$$

ρ wird wie bei der Drehgruppe definiert. $\widehat{\rho}$ heißt *konjugierte Darstellung* und ist etwas neues: $g = \widehat{g}$ für $g \in SU(2)$, so daß $\rho(g,a) = \widehat{\rho}(g,a)$ gilt, wenn $\Lambda = h(g)$ eine Drehung ist. Spinoren ψ und $\widehat{\psi}$, die sich gemäß $(*)$ transformieren, heißen *Weylspinoren*.

(2) Zeige, daß ρ und $\widehat{\rho}$ Darstellungen der Überlagerungsgruppe von $\mathcal{P}$ sind.

(3) Zeige das sog. *Intertwining* $W\widehat{\rho}(g,a) = \rho(g,a)W$ und $\widehat{W}\rho(g,a) = \widehat{\rho}(g,a)\widehat{W}$.

(4) Zeige mit (3): ist $\widehat{\psi}(x)$ eine Lösung der *Weylgleichung* $W\widehat{\psi} = 0$, so auch $\widehat{\rho}(g,a)\widehat{\psi}$ und ist $\psi(x)$ eine Lösung der *konjugierten Weylgleichung* $\widehat{W}\psi = 0$, so auch $\rho(g,a)\psi$. Dies bedeutet, daß die Lösungen der beiden Weylgleichungen jeweils einen poincaréinvarianten Unterraum von $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{1,3},\mathbb{C}^2)$ bilden.

(5) Zeige $W\widehat{W} = \widehat{W}W = -g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = -\Box$ und folgere, daß Lösungen der Weylgleichungen die Klein/Gordon–Gleichung mit $m = 0$ erfüllen.

(6) Zeige, daß $P^{-1}WP = -\widehat{W}$, d.h. die Weyloperatoren sind *nicht* paritätsinvariant.

(7) Setze als Lösung $\widehat{\psi} = \widehat{u}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle p,x\rangle}$ an. Zeige, daß $\langle p,p\rangle = 0$. Zeige, daß für positive Energie Spin und Impuls antiparallel sind, für negative Energie dagegen parallel.

(8) Setze analog $\psi = u_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle p,x\rangle}$ an. Was gilt nun für die Richtungen von Spin und Impuls? Was haben also die Lösungen der beiden Weylgleichungen miteinander zu tun und welches Elementarteilchen wird durch sie in guter Näherung beschrieben?

Will man eine Masse einführen, so muß man folgendes gekoppelte System aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 0 & W \\ \widehat{W} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \widehat{\psi} \end{pmatrix} + \frac{mc}{\hbar}\begin{pmatrix} \psi \\ \widehat{\psi} \end{pmatrix} = 0.$$

(9) Begründe, wieso man bei einer nichtverschwindenden Masse nicht mehr entkoppelnde Gleichungen für zweikomponentigen Spinoren aufstellen kann, sondern einen vierdimensionalen Spinor betrachten muß.

(10) Zeige, daß wenn ψ und $\widehat{\psi}$ obige Gleichung lösen, so auch $\rho(g,a)\psi$ und $\widehat{\rho}(g,a)\widehat{\psi}$. Zeige auch, daß ψ und $\widehat{\psi}$ die Klein/Gordon–Gleichung zur Masse m lösen.

Hausaufgaben X

Abgabe vom 13. Januar bis 15. Januar in den Übungen

H10.1 *Pionisches Atom*

Betrachte die Klein/Gordon–Gleichung für ein spinloses Teilchen der Masse m und Ladung $(-e)$ im Coulombfeld einer Punktladung Ze. Wir interessieren uns für die stationären Zustände, daher setzen wir als Lösung $\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\frac{iE}{\hbar}t}$ an.

(1) Zeige

$$\left(\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)^2 - m^2c^4 + \hbar^2c^2\Delta\right)\psi(\vec{r}) = 0.$$

(2) Separiere $\psi(\vec{r}) = R_\ell(r)Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$ und zeige, daß in der Variablen $\varrho = \beta r$ gilt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{s(s+1)}{\varrho^2} + \frac{\lambda}{\varrho} - \frac{1}{4}\right)R_\ell(r) = 0$$

mit $\beta^2 = \frac{4(m^2c^4-E^2)}{\hbar^2c^2}$, $\lambda = \frac{2Z\alpha E}{\hbar c\beta}$, $s(s+1) = \ell(\ell+1) - Z^2\alpha^2$ sowie $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$.

(3) Motiviere den Ansatz $R_\ell = \varrho^s W(\varrho)\, \mathrm{e}^{-\varrho/2}$ und zeige
$$\varrho W''(\varrho) + (2s + 2 - \varrho)W'(\varrho) + (\lambda - s - 1)W(\varrho) = 0.$$
(4) Vergleiche (3) mit der Kummergleichung für das nichtrelavistische Coulombproblem (TP II, A7.1) und lese die Energieeigenwerte ab. Warum gilt $E > 0$?

(5) Entwickle die Energieeigenwerte in α und vergleiche das Ergebnis mit dem nichtrelativistischen Fall. Diskutiere insbesondere die Aufhebung der $\ell-$Entartung.

(6) Schätze ab, wie gut die Annahme eines punktförmigen Kerns für ein π^- ist.

(7) Diskutiere die Lösungen bei $E < 0$. Wann kann es gebundene Zustände geben?

Bem.: Man kann dieses Problem so behandeln, da für massive Teilchen die kleine Gruppe $SO(3)$ ist und daher die Lösung des Problems Drehimpulsquantenzahlen trägt.

(15 Punkte)

H10.2 *Nichtrelativistischer Grenzfall der Diracgleichung*

In dieser Aufgabe wird gezeigt, wie die Spin/Bahn–Kopplung (TP II, H9.2) und der $g-$Faktor 2 (H2.1) für Spin $\frac{1}{2}$ auf natürliche Weise aus der Diracgleichung folgen.

(1) Im nichtrelativistischen Fall ist mc^2 die größte Energie im Problem. Dies motiviert den Ansatz $\psi = \exp(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t)\binom{\varphi}{\chi}$, wobei φ und χ zeitlich nur langsam variieren. Folgere so aus der schrödingerartigen Form der Diracgleichung:
$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\vec\sigma(\vec p - \frac{q}{c}\vec A)\chi\\ \vec\sigma(\vec p - \frac{q}{c}\vec A)\varphi\end{pmatrix} + q\Phi\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix}. \qquad (*)$$
Zeige, daß in niedrigster Ordnung, d.h. $\frac{1}{c}$, gilt: $\chi = \frac{1}{2mc}\vec\sigma(\vec p - \frac{q}{c}\vec A)\varphi$.

(2) Folgere aus (1) die (warum in Ordnung $\frac{1}{c}$ exakte?) *Pauligleichung* für φ:
$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left(\frac{1}{2m}(\vec p - \frac{q}{c}\vec A)^2 - \frac{q\hbar}{2mc}\vec\sigma(\vec B) + q\Phi\right)\varphi.$$
Zeige durch Setzen von $\vec A = \frac{1}{2}\vec B\times\vec r$, daß für den Spin der $g-$Faktor $g = 2$ ist.

(3) Nun sollen für $\vec A = 0$ die Korrekturen in $\frac{1}{c^2}$ berechnet werden. Setze dazu in $(*)$ den Ausdruck für χ aus (1) für die dort vernachlässigten Termen ein und löse das Resultat nach χ auf. Setze dieses Ergebnis in die erste Gleichung von $(*)$ ein:
$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left(\left(1 - \frac{\vec p^2}{4m^2c^2}\right)\left(\frac{\vec p^2}{2m} + q\Phi\right) + \frac{q}{4m^2c^2}\vec\sigma(\vec p)\Phi\,\vec\sigma(\vec p)\right)\varphi =: H'\varphi.$$
Warum erhält man auf diese Weise alle Korrekturen der Ordnung $\frac{1}{c^2}$?

(4) Warum gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho = |\varphi|^2 + |\chi|^2$ in Ordnung $\frac{1}{c^2}$ nun $\varrho = |\varphi|^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}|\vec\sigma(\vec\nabla)\varphi|^2$? Um im Schrödingerbild weiterrechnen zu können, ist daher ein neues φ_S einzuführen, so daß $\varrho = |\varphi_S|^2$. Zeige $\varphi_S = (1 + \frac{\vec p^2}{8m^2c^2})\varphi$.

(5) Warum gilt $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi_S = H\varphi_S$ mit $H = (1 + \frac{\vec p^2}{8m^2c^2})H'(1 - \frac{\vec p^2}{8m^2c^2})$? Zeige
$$H = \frac{\vec p^2}{2m} + q\Phi + \widetilde H, \quad \widetilde H = \underbrace{-\frac{|\vec p|^4}{8m^3c^2}}_{\text{Dispersionsterm}}\ \underbrace{-\frac{q\hbar}{4m^2c^2}\,\vec\sigma(\vec E\times\vec p)}_{\text{Spin/Bahn−Term}}\underbrace{-\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\,\mathrm{div}\vec E.}_{\text{G.Darwin−Term}}$$
Interpretiere Dispersions– und Spin/Bahn–Term (für kugelsymmetrisches Φ).

(15 Punkte)