Anwesenheitsübungen XII

20. Januar bis 22. Januar

A12.1 *Mottstreuung*

Ein im Volumen V eingesperrtes Elektron befinde sich in einem äußeren Feld $A_\mu(x)$. Als Basis der freien Lösungen der Diracgleichung wählen wir mit Impuls p und Spin s

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{mc^2}{EV}}\, u(p,s)\, \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\langle p,x\rangle} \text{ (Elektron)}, \quad \psi(x) = \sqrt{\frac{mc^2}{EV}}\, v(p,s)\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\langle p,x\rangle} \text{ (Positron)}$$

mit ($v(p,s)$ ist $u(p,s)$, die beiden ersten mit den beiden letzten Einträgen vertauscht)

$$u(p,\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\tfrac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c\,p^z}{E+mc^2} \\ \frac{c\,p^+}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u(p,-\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\tfrac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c\,p^-}{E+mc^2} \\ \frac{-c\,p^z}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad p^\pm = p^x \pm \mathrm{i}\, p^y.$$

Wir berücksichtigen das äußere Feld $A_\mu(x)$ nur in niedrigster Ordnung Störungstheorie (Bornsche Näherung). Dann lautet das Übergangsmatrixelement zwischen ψ_i und ψ_f

$$S_{fi} = -\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\int \mathrm{d}^4x\, \overline{\psi}_f(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi_i(x).$$

(1) Zeige, daß das Matrixelement im wesentlichen durch die Fouriertransformation des Viererpotentials an der Stelle des Viererimpulsübertrags gegeben ist:

$$S_{fi} = -\frac{\mathrm{i}e}{V}\frac{mc}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{E_iE_f}}(\overline{u}_f\gamma^\mu u_i)(2\pi)^2(\mathcal{F}A_\mu)\left(\frac{p_i-p_f}{\hbar}\right).$$

(2) Sei speziell $A_0(x) = -\frac{Ze}{r}$, $\vec{A}=0$. Zeige: mit dem Impulsübertrag $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$ gilt

$$S_{fi} = \mathrm{i}\,4\pi\frac{Ze^2}{V}\frac{mc^2}{\sqrt{E_iE_f}}(\overline{u}_f\gamma^0u_i)\frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2}2\pi\delta(E_f-E_i).$$

(3) Warum beschreibt $N = \frac{V\,\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi\hbar)^3}$ die Anzahl der Zustände im Impulsintervall d^3p_f? Die Übergangswahrscheinlichkeit pro Teilchen ergibt sich somit als $N|S_{fi}|^2$.

(4) Berechne die Anzahl R der Übergänge ins Impulsintervall d^3p_f pro Zeiteinheit:

$$R = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{V}\frac{m^2c^4}{E_iE_f}|\overline{u}_f\gamma^0u_i|^2\frac{1}{|\vec{q}|^4}\mathrm{d}^3p_f\delta(E_f-E_i).$$

(5) Wieso ist $v_i = \frac{|\vec{p}_i|c^2}{E}$ die Geschwindigkeit einlaufender Teilchen und $j = \frac{v_i}{V}$ ihre Stromdichte? Berechne damit den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2m^2(\hbar c)^2}{|\vec{q}|^4}|\overline{u}_f\gamma^0u_i|^2.$$

(6) In einem Experiment wird man i.a. die Spinpolarisationen nicht kennen. Daher müssen wir die auslaufenden Zustände summieren und die einlaufenden mitteln:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2m^2(\hbar c)^2}{|\vec{q}|^4}\frac{1}{2}\sum_{s_f,s_i}|\overline{u}_f\gamma^0u_i|^2.$$

Zeige, daß diese Spinmittelung als Spur geschrieben werden kann:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2 m^2(\hbar c)^2}{2|\vec{q}|^4} \mathrm{Spur}\left(\gamma^0 \frac{\gamma_\mu p_i^\mu + mc}{2mc} \gamma^0 \frac{\gamma_\mu p_f^\mu + mc}{2mc}\right).$$

(7) Warum verschwindet die Spur eines Produkts aus einer ungeraden Anzahl von γ^μ? Zeige die Identität $\mathrm{Spur}(a_\mu \gamma^\mu b_\nu \gamma^\nu) = 4\langle a, b\rangle$ und verallgemeinere diese. Folgere

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2\hbar^2}{2|\vec{q}|^4 c^2}(8E_i E_f - 4\langle p_i, p_f\rangle c^2 + 4m^2c^4).$$

(8) Zeige, daß $\langle p_i, p_f\rangle = \frac{E^2}{c^2} - p^2\cos\vartheta$ und $|\vec{q}|^2 = 4p^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$. Dabei ist $E_i = E_f = E$, $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = p$ und ϑ der Streuwinkel. Folgere mit $\beta = \frac{v_i}{c}$ den Mottquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2\hbar^2}{4p^2\beta^2\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\left(1 - \beta^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{Rutherford}}\left(1 - \beta^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Hausaufgaben XII

Abgabe vom 27. Januar bis 29. Januar in den Übungen

H12.1 *Paarbildung*

Wir wollen nun einen ähnlichen Prozeß wie in A12.1 betrachten, nämlich die Bildung eines Elektron/Positron–Paars durch ein äußeres elektromagnetisches Feld.

(1) Zeige, daß das Matrixelement im wesentlichen durch die Fouriertransformation des Viererpotentials an der Stelle des Gesamtimpulses $P = p + p'$ gegeben ist:

$$S_{fi} = -\frac{\mathrm{i}e}{V}\frac{mc}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{EE'}}\overline{v}(p', s')\gamma^\mu u(p, s)(2\pi)^2(\mathcal{F}A_\mu)\left(\frac{P}{\hbar}\right).$$

Das Elektron habe Viererimpuls p, Spin s und Spinor u, das Positron p', s', v.

(2) Führe in $|S_{fi}|^2$ die Summation über die Teilchenspins aus und zeige mit $K = \frac{P}{\hbar}$:

$$|S_{fi}|^2 = \frac{(2\pi)^4 e^2 m^2 c^2}{\hbar^2 V^2 EE'}(\mathcal{F}A_\mu)(K)(\mathcal{F}A_\nu)(-K)\,\mathrm{Spur}\left(\gamma^\mu \frac{\gamma^\kappa p_\kappa + mc}{2mc}\gamma^\nu \frac{\gamma^\kappa p'_\kappa - mc}{2mc}\right).$$

(3) Berechne die Spur mit den Regeln aus A12.1.7 und zeige

$$|S_{fi}|^2 = \frac{(2\pi)^4 e^2}{\hbar^2 V^2 EE'}(\mathcal{F}A_\mu)(K)(\mathcal{F}A_\nu)(-K)(-m^2c^2 g^{\mu\nu} + p^\mu p'^\nu + p^\nu p'^\mu - g^{\mu\nu}\langle p, p'\rangle).$$

(4) Warum ist $N = \frac{V^2\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3p'}{(2\pi\hbar)^6}$ die Anzahl der Zustände im Impulsintervall $\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3p'$?

(5) Berechne die Fouriertransformation für $A_0 = 0$, $\vec{A} = (a\cos\omega t)\vec{e}_z$, $a \in \mathbb{R}$.

(6) Berechne die Zahl der produzierten Paare als $N|S_{fi}|^2$:

$$\frac{e^2}{24\pi\hbar^2c^3}|a|^2\omega^2\sqrt{1 - \frac{4m^2c^4}{\hbar^2\omega^2}}\left(1 + \frac{2m^2c^4}{\hbar^2\omega^2}\right)(2\pi)^4\delta\left(\frac{\vec{p} + \vec{p}'}{\hbar}\right)\delta\left(\frac{E + E'}{\hbar} - \omega\right).$$

(7) Argumentiere, warum die Anzahl R der Paare pro Volumen und Zeiteinheit lautet:

$$R = \frac{e^2}{24\pi\hbar^2c^3}|a|^2\omega^2\sqrt{1 - \frac{4m^2c^4}{\hbar^2\omega^2}}\left(1 + \frac{2m^2c^4}{\hbar^2\omega^2}\right).$$

(8) Wie sieht die Winkelverteilung der Teilchenimpulse aus?

(9) In welchen Fällen kann überhaupt Paarproduktion stattfinden?

(30 Punkte)