Anwesenheitsübungen III

4. November bis 6. November

A3.1 *Zweizustandsproblem*

Es gibt nur wenige Fälle, in denen ein Problem mit zeitabhängigem Potential exakt lösbar ist und man nicht auf Störungstheorie zurückgreifen muß. Betrachte ein System mit Hamiltonoperator H_0 und zwei Zuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ mit Energien $E_1 < E_2$.

(1) Warum gilt
$$H_0 = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2|\,?$$

(2) Da $V(t)$ und damit $H = H_0 + V(t)$ zeitabhängig ist, ist das Problem nicht mehr stationär, insbesondere ist der Zeitentwicklungsoperator nicht mehr $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$. Daher geht man zum sog. *Wechselwirkungsbild* über. Zeige, daß für einen Zustand
$$|\alpha(t)\rangle_I := \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t/\hbar}|\alpha(t)\rangle$$
gilt:
$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha(t)\rangle_I = V_I(t)|\alpha(t)\rangle_I \quad \text{mit} \quad V_I(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t/\hbar}V(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar}.$$
Insbesondere ändert sich also $|\alpha(t)\rangle_I$ nicht, wenn $V = 0$ ist.

(3) Zeige auch, daß $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_I(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[V_I(t), H_0] + \frac{\partial}{\partial t}V_I(t)$.

(4) Das Wechselwirkungsbild, wo die Zeitabhängigkeit auf Zustände und Operatoren verteilt wird, kann zu Verwechslungen mit dem *Heisenbergbild* führen, dort definiert man (für zeitunabhängiges H) die Operatoren als $A_H(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar}A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$, d.h. mit dem vollen H, während die Zustände konstant sind. Zeige die Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_H(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[A_H(t), H] + \frac{\partial}{\partial t}A_H(t)$, wieder tritt das volle H auf.

(5) Schreibe nun $|\alpha(t)\rangle_I$ in der Basis $|n\rangle$ aus:
$$|\alpha(t)\rangle_I = \sum_n c_n(t)|n\rangle.$$
Folgere daraus das gekoppelte Differentialgleichungssystem
$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_n(t) = \sum_m \langle n|V(t)|m\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{E_n - E_m}{\hbar}t}c_m(t) =: \sum_m V_{nm}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{nm}t}c_m(t).$$

(6) Gegeben sei ein sinusförmigen Potential $V(t) = \gamma\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}|1\rangle\langle 2| + \gamma\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}|2\rangle\langle 1|$, wobei $\gamma, \omega > 0$. Was bewirkt die Anwesenheit dieses Potentials?

(7) Zu $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|1\rangle$: $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$. Löse das Gleichungssystem aus (5) für das Potential aus (6) und erhalte die *Rabi–Formel*
$$|c_2(t)|^2 = \frac{\frac{\gamma^2}{\hbar^2}}{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}}\sin^2\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}}\;t\right), \quad |c_1(t)|^2 = 1 - |c_2(t)|^2.$$

(8) Interpretiere das Ergebnis. Wann ist die Oszillation besonders stark?

(9) Ein Beispiel für ein solches System ist die Spinresonanz, ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ in einem Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e}_3 + B_1(\vec{e}_1\cos\omega t + \vec{e}_2\sin\omega t)$, d.h. ein konstantes, homogenes Feld in $z-$Richtung, überlagert von einem in der $xy-$Ebene rotierenden Feld. Stelle H_0 und $V(t)$ auf. Welche Größe übernimmt die Rolle von γ?

In der Praxis kann man ein solches Wechselfeld schlecht erzeugen, man nimmt stattdessen ein in $x-$Richtung schwingendes Feld, was aber als Superposition eines rechts- und eines linksdrehenden Feldes geschrieben werden kann, wobei die Änderung des Drehsinns durch $\omega \to -\omega$ gegeben ist. Wegen der Resonanzbedingung $\omega \approx \omega_{21}$ ist immer nur eine der beiden Komponenten wirklich relevant.

Hausaufgaben III

Abgabe vom 11. November bis 13. November in den Übungen

H3.1 *Anregung eines Atoms durch Stoß mit einem schweren geladenen Teilchen*

Die Bewegung $\vec{R}(t)$ eines schweren Teilchens (Ladung Z) ist quasiklassisch, daher bewegt sich das Teilchen geradlinig–gleichförmig mit der Geschwindigkeit v, z.B. $\vec{R}(t) = (vt, b, 0)$. Das Potential für die Wechselwirkung zwischen einem Elektron eines Wasserstoffatoms (mit Kern im Ursprung) und dem Teilchen lautet: $\widetilde{V}(t) = -\frac{Ze^2}{|\vec{R}(t)-\vec{r}\,|}$.

(1) Zeige, daß ein Potential, was nicht von $\vec{r}$ abhängt, lediglich die Phase der Wellenfunktion des Elektrons beeinflußt. Daher rechnen wir mit $V(t) = \widetilde{V}(t) + \frac{Ze^2}{|\vec{R}(t)|}$.

(2) Zeige, daß für $|\vec{R}(t)| \gg |\vec{r}\,|$ unter Berücksichtigung von Dipol und Quadrupol gilt:

$$V(t) \approx -Ze^2 \left(\frac{vtx_1 + bx_2}{|\vec{R}(t)|^3} + \frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2|\vec{R}(t)|^3} + \frac{3b^2(x_2^2 - x_1^2)}{2|\vec{R}(t)|^5} + \frac{3vtbx_1x_2}{|\vec{R}(t)|^5} \right).$$

(3) Die Übergangswahrscheinlichkeit $w_{nm}^{(1)}$ vom Zustand $|m\rangle$ in den Zustand $|n\rangle$ lautet

$$w_{nm}^{(1)} = |c_{nm}^{(1)}|^2, \quad c_{nm}^{(1)} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \langle n|V(t)|m\rangle\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(E_m - E_n)t}{\hbar}}$$

in zeitabhängiger Störungstheorie erster Ordnung. Zeige mit $\omega = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$, daß

$$c_{nm}^{(1)} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar} Ze^2 \int \left(\frac{|\omega|}{v^2} \left(2x_2 + \frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{b} \right) K_1\left(\frac{b|\omega|}{v}\right) + \frac{\omega^2}{v^3}(x_2^2 - x_1^2) K_2\left(\frac{b|\omega|}{v}\right) \right.$$

$$\left. + 2\mathrm{i} \left(\frac{\omega}{v^2} x_1 K_0\left(\frac{b|\omega|}{v}\right) + \mathrm{sign}(\omega) \frac{\omega^2}{v^3} x_1 x_2 K_1\left(\frac{b|\omega|}{v}\right) \right) \right) \psi_n^*(\vec{r})\psi_m(\vec{r})\mathrm{d}^3r,$$

$$\text{wobei} \quad K_n(\alpha z) = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})(2z)^n}{\sqrt{\pi}\,\alpha^n} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t \cos(\alpha t)}{(t^2 + z^2)^{n+\frac{1}{2}}}, \quad \alpha > 0.$$

(4) Diskutiere den Wert der Übergangsamplitude $c_{mn}^{(1)}$ für den umgekehrten Prozeß.

(5) Schätze die Größe des Argumentes $\frac{b|\omega|}{v}$ der modifizierten Besselfunktionen K_i ab. Vergleiche die Größenordnung des Dipol– und Quadrupol–Beitrags zu $c_{nm}^{(1)}$. Benutze als Abschätzung für die Koordinaten den Bohr–Radius und verwende die Asymptotik $K_n(z) \sim \frac{\mathrm{e}^{-z}}{\sqrt{z}}$ $(z \to \infty)$ bzw. $K_n(z) \sim z^{-n}$, $K_0(z) = -\ln z$ $(z \to 0)$.

(6) Entscheide mittels des Wigner/Eckart–Theorems, zwischen welchen Zuständen der Dipol– bzw. Quadrupolterm in $V(t)$ Übergänge ermöglicht (vgl. H2.2.4).

(7) Berechne mit (3) und (6) explizit $c_{2\ell m,1s}^{(1)}$ und diskutiere das Ergebnis.

(30 Punkte)