Anwesenheitsübungen V

18. November bis 20. November

A5.1 *Die Bornsche Näherung*

Die Bornsche Näherung für die (elastische) Potentialstreuung lautet in erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi m^2}{\hbar^4}\left|\int \mathrm{d}^3r \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} V(\vec{r})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{r}\cdot(\vec{k}_i-\vec{k}_f)}\right|^2, \quad \text{wobei} \quad |\vec{k}_f| = |\vec{k}_i| = k. \qquad (*)$$

Kurz gesagt, ist der differentielle Wirkungsquerschnitt gegeben durch die Fouriertransformierte des Potentials, genommen beim Wert des Impulsübertrags. d.h.

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi m^2}{\hbar^4}|(\mathcal{F}V)(\vec{q})|^2, \quad \vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f.$$

Greife mit Hilfe des Tutors der Vorlesung vor und folgere $(*)$ aus der Goldenen Regel.

(1) Zeige für den Impulsübertrag, daß $|\vec{q}| = 2k\sin\frac{\vartheta}{2}$, wobei ϑ der Streuwinkel ist.

(2) Führe für ein radialsymmetrisches Potential die Winkelintegration in $(*)$ aus:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4m^2}{\hbar^4}\frac{1}{|\vec{q}|^2}\left|\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, V(r)\sin(|\vec{q}|r)\right|^2.$$

(3) Betrachte ein Yukawapotential $V(r) = \frac{\kappa}{r}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0}}$. Zeige mit (2), daß

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\kappa}{4E\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}}\right)^2.$$

(4) Welche berühmte Formel ergibt sich in (3) im Grenzfall des Coulombpotentials? Kommt noch $\hbar$ vor? Diskutiere das Verhalten bei Vorwärtsstreuung.

(5) Zeige für ein Glockenpotential $V(r) = V_0\exp(-\frac{r^2}{2r_0^2})$, daß

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi m^2 r_0^6 V_0^2}{\hbar^4}\,\mathrm{e}^{-4k^2r_0^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Wie verhält sich dieser Streuquerschnitt für große Streuwinkel?

(6) Zeige für einen kugelsymmetrischen Potentialtopf mit Tiefe V_0 und Radius r_0:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{m^2V_0}{\pi\hbar^4}\frac{1}{|\vec{q}|^4}\left(r_0\cos(|\vec{q}|r_0) - \frac{\sin(|\vec{q}|r_0)}{|\vec{q}|}\right)^2.$$

Wie verhält sich dieser Streuquerschnitt für große Energien?

(7) Diskutiere $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ in (3), (5) und (6) für kleine Energien ($kr_0 \ll 1$). Könnte man die Potentiale mit langsamen Projektilen unterscheiden? Was haben sie gemeinsam?

(8) $V(\vec{r})$ sei das Coulombpotential einer Ladungsverteilung ϱ, d.h.

$$V(\vec{r}) = Q\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

Zeige

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{32\pi^3m^2Q^2}{\hbar^4}\frac{1}{|\vec{q}|^4}|(\mathcal{F}\varrho)(\vec{q})|^2.$$

$|(\mathcal{F}\varrho)(\vec{q})|^2$ heißt *Formfaktor*. Was ergibt sich für eine Punktladung?

Hausaufgaben V

Abgabe vom 25. November bis 27. November in den Übungen

H5.1 *Pion/Proton–Streuung*

(1) Berechne $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für die Überlagerung eines Yukawa– und eines Coulombpotentials:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\kappa}{4E\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}} + \frac{q_1 q_2}{4E\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \right)^2 .$$

(2) Was geschieht, wenn der Detektor in Vorwärtsrichtung ($\vartheta = 0$) steht?

(3) Vergleiche die Beiträge des Coulombpotentials, des Yukawapotentials und des Interferenzterms in $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ in Abhängigkeit von E für $\sin\frac{\vartheta}{2} > 0.1$, d.h. weg von der Vorwärtsrichtung. Es sei $\kappa = 0.07\,\hbar c$, $r_0 = 1.4\,\mathrm{fm}$, $mc^2 = 140\,\mathrm{MeV}$, $q_1 = q_2 = e$.

(8 Punkte)

H5.2 *Streuung eines Elektrons an einem Wasserstoffatom*

Das Atom befinde sich im Grundzustand. Betrachte zunächst elastische Streuung.

(1) Berechne die Gesamt–Ladungsdichte für das Wasserstoffatom zu

$$\varrho(\vec{r}\,) = e\delta^{(3)}(\vec{r}\,) - \frac{e}{\pi r_0^3}\, \mathrm{e}^{-\frac{2r}{r_0}} .$$

(2) Berechne mittels A5.1.8 den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{r_0^2}\frac{1}{|\vec{q}\,|^4} \left(1 - \frac{16}{(4+|\vec{q}\,|^2 r_0^2)^2} \right)^2 .$$

Nun sei die Streuung inelastisch, d.h. das Atom kann auf $|n\ell m\rangle$ angeregt werden.

(3) Zeige durch Übertragung der Herleitung der Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung auf den inelastischen Fall, daß

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi m}{\hbar^2|\vec{k}_i|} \int dk\, k^2 \delta\left(\frac{\hbar^2|\vec{k}\,|^2}{2m} + E_{n\ell} - \frac{\hbar^2|\vec{k}_i|^2}{2m} - E_{1s} \right)$$
$$\times \left| \iint \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \psi^*_{n\ell m}(\vec{r}\,')\psi_{1s}(\vec{r}\,') \left(-\frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{r}\cdot(\vec{k}_i - \vec{k})} d^3r\, d^3r' \right|^2 .$$

Dabei ist $\vec{k}_i$ der Wellenzahlvektor des einlaufenden Teilchens.

(4) Warum trägt das Potential des Atomkerns nicht zur inelastischen Streuung bei?

(5) Zeige in (3) durch Anwendung des Faltungstheorems, daß

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{32\pi^3 m^2 e^4}{\hbar^4} \frac{|\vec{k}_f|}{|\vec{k}_i|} \frac{1}{|\vec{q}\,|^4} |(\mathcal{F}(\psi^*_{n\ell m}\psi_{1s}))(\vec{q}\,)|^2 \quad \text{mit} \quad |\vec{k}_f|^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left(E_{1s} - E_{n\ell} + \frac{\hbar^2|\vec{k}_i|^2}{2m} \right),$$

$$|\vec{q}\,|^2 = 2\left(|\vec{k}_i|^2 + \frac{(E_{1s} - E_{n\ell})m}{\hbar^2} - \frac{|\vec{k}_i|}{\hbar}\sqrt{m\left(2(E_{1s} - E_{n\ell}) + \frac{\hbar^2|\vec{k}_i|^2}{m} \right)} \cos\vartheta \right) .$$

(6) Berechne $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ explizit für den Fall, daß das Atom in den Zustand $2s$ angeregt wird.

(22 Punkte)