Anwesenheitsübungen VII

2. Dezember bis 4. Dezember

A7.1 *Algebra der Fermionen–Operatoren*

Betrachte ein Paar aus einem antikommutierenden fermionischen Erzeuger und Vernichter, d.h. $\{a, a^+\} = 1$. Der Besetzungszahl–Operator ist $N = a^+ a$.

(1) Es sei $|n\rangle$ ein Eigenzustand von N mit Eigenwert n. Ist n reell?

(2) Zeige, daß $n \geq 0$. Zeige auch, daß n nach oben beschränkt ist.

(3) Zeige, daß $a^+|n\rangle$ bzw. $a|n\rangle$ Eigenzustände von N sind. Berechne die Eigenwerte.

(4) Bestimme, welche Werte n annehmen kann. Diskutiere das Pauliprinzip.

(5) Welche Aussagen über n können im bosonischen Fall $[a, a^+] = 1$ gemacht werden?

A7.2 *Niederenergetische Zustände eines wechselwirkenden Bosegases*

Den Grundzustand eines Vielteilchensystems möchte man als Vakuum ansehen, seine niedrigsten Anregungen nennt man Quasiteilchen. Die sog. Bogoliubovtransformation verknüpft die Erzeuger und Vernichter von Quasiteilchen und elementaren Teilchen. Der Hamiltonoperator für Bosonen mit Wechselwirkung u im Volumen V ist

$$H = \sum_{\vec{p}} \frac{\vec{p}^2}{2m} a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_1, \vec{p}'_2} \delta_{\vec{p}_1+\vec{p}_2, \vec{p}'_1+\vec{p}'_2} U_{\vec{p}'_1 \vec{p}'_2|\vec{p}_1, \vec{p}_2} a^+_{\vec{p}'_1} a^+_{\vec{p}'_2} a_{\vec{p}_2} a_{\vec{p}_1},$$

wobei der Wechselwirkungsterm $U_{\vec{p}'_1 \vec{p}'_2|\vec{p}_1 \vec{p}_2} = \frac{1}{V} \int e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar} u(\vec{r}) d^3r$ für Impulsübertrag $\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}'_2 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1$ Fouriertransformation eines Potentials $u(\vec{r})$ ist. Die Deltafunktion für die Impulserhaltung folgt daraus, daß das Potential nur vom Relativabstand der beiden Teilchen abhängt (und daher durch $u(\vec{r})$ ausgedrückt werden kann). Für niedrige Temperaturen treten nur kleine Impulse auf, so daß in niedrigster Näherung

$$H = \sum_{\vec{p}} \frac{\vec{p}^2}{2m} a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \frac{u_0}{2V} \sum_{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_1, \vec{p}'_2} \delta_{\vec{p}_1+\vec{p}_2, \vec{p}'_1+\vec{p}'_2} a^+_{\vec{p}'_1} a^+_{\vec{p}'_2} a_{\vec{p}_2} a_{\vec{p}_1}$$

wird, wobei der Wechselwirkungsterm durch $u_0 = \int u(\vec{r}) d^3r$ genähert wird. Bei den niedrigen Anregungen des wechselwirkenden Bosegases sollten fast alle Teilchen im Grundzustand sein, so daß die Teilchenzahl N im wesentlichen N_0 ist. Man entwickelt nun den Wechselwirkungsterm so, daß max. zwei der vier Impulse nicht verschwinden.

(1) Zeige $a^+_0 a^+_0 a_0 a_0 = N_0^2 - N_0 \approx N^2 - 2N \sum_{\vec{p} \neq 0} a^+_{\vec{p}} a_p$.

(2) Berechne, wie a_0 bzw. a^+_0 auf einen $n-$Teilchenzustand $\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+_0)^n |0\rangle$ wirken: $a_0 \Phi_n = \sqrt{n} \Phi_{n-1}$, $a^+_0 \Phi_n = \sqrt{n+1} \Phi_{n+1}$. Folgere, daß a_0 und a^+_0 für große n als Multiplikation mit $\sqrt{n}$ dargestellt werden können. Zeige damit, daß

$$H \approx \frac{u_0 N^2}{2V} + \frac{u_0 N}{2V} \sum_{\vec{p} \neq 0} \left(a^+_{\vec{p}} a^+_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + 2 a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} \right) + \sum_{\vec{p} \neq 0} \frac{\vec{p}^2}{2m} a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}}.$$

(3) Betrachte für $\alpha_{\vec{p}} \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha_{\vec{p}}| < 1$ die *Bogoliubovtransformation* von $a_{\vec{p}}$ auf $b_{\vec{p}}$:

$$b_{\vec{p}} = \frac{a_{\vec{p}} + \alpha_{\vec{p}}\, a^+_{-\vec{p}}}{\sqrt{1 - \alpha^2_{\vec{p}}}} \quad \text{und} \quad b^+_{\vec{p}} = \frac{a^+_{\vec{p}} + \alpha_{\vec{p}}\, a_{-\vec{p}}}{\sqrt{1 - \alpha^2_{\vec{p}}}}.$$

Zeige

$$[b_{\vec{p}}, b^+_{\vec{p}'}] = \delta_{\vec{p},\vec{p}'}, \ [b_{\vec{p}}, b_{\vec{p}'}] = [b^+_{\vec{p}}, b^+_{\vec{p}'}] = 0.$$

Den $b_{\vec{p}}, b^+_{\vec{p}}$ entsprechenden also bosonische *Quasiteilchen*, sog. Bogolonen.

(4) Zeige, daß mit geeigneter Wahl von $\alpha_{\vec{p}}$ der Hamiltonoperator diagonal wird:

$$H = E_0 + \sum_{\vec{p}\neq 0} \varepsilon(\vec{p}) b^+_{\vec{p}} b_{\vec{p}}\,.$$

Bestimme E_0 und $\varepsilon(\vec{p})$ und interpretiere diese Größen.

Hausaufgaben VII

Abgabe vom 9. Dezember bis 11. Dezember in den Übungen

H7.1 *Hamiltonoperator des eindimensionalen Hubbardmodells* (20 Punkte)

N Elektronen, die mit Abstand a auf einer Kette mit Plätzen x_i sitzen, werden durch

$$H_0 = -t \sum_{i=1}^{N} \sum_{\sigma} (a^+_\sigma(x_i) a_\sigma(x_i + a) + a^+_\sigma(x_i) a_\sigma(x_i - a))$$

beschrieben, wobei die beiden Terme der Bewegung nach rechts bzw. links entsprechen. Die $a(x_i)$ erfüllen dabei kanonische Antikommutatoren $\{a_\sigma(x_i), a^+_{\sigma'}(x_j)\} = \delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{x_i,x_j}$. Die Spinindizes σ nehmen dabei die Werte $\uparrow \equiv \frac{1}{2}$ und $\downarrow \equiv -\frac{1}{2}$ an.

(1) Zeige, daß H_0 nach dem Übergang zur Impulsdarstellung folgende Form hat:

$$H_0 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\sigma} \int \mathrm{d}k\, \varepsilon(k) a^+_\sigma(k) a_\sigma(k).$$

Gib die explizite Form der Dispersionsrelation $\varepsilon(k)$ an. Gehe dazu (im Limes einer langen Kette) von der diskreten Fouriertransformation $a_\sigma(x) = \frac{1}{L}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} a_\sigma(k)$ zur kontinuierlichen $a_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} a_\sigma(k)$ über.

(2) Betrachte nun die zusätzliche Wechselwirkung (was bedeutet dies physikalisch?)

$$H' = \frac{U}{2} \sum_{i,\sigma} a^+_\sigma(x_i) a_\sigma(x_i) a^+_{-\sigma}(x_i) a_{-\sigma}(x_i).$$

Zeige, daß $M_\sigma = \sum_i a^+_\sigma(x_i) a_\sigma(x_i)$ gute Quantenzahlen bzgl. des gesamten Hamiltonoperators $H = H_0 + H'$ besitzen. Was bedeuten die Operatoren M_σ?

(3) Die drei Komponenten des Spin–Operators werden definiert durch

$$S^i_n = \frac{\hbar}{2} \sum_{\sigma,\sigma'} a^+_\sigma(x_i) \sigma^i_{\sigma\sigma'} a_{\sigma'}(x_i)$$

mit den Paulimatrizen σ^i. Erfüllen diese Operatoren die Drehimpulsalgebra?

H7.2 *Verteilungsfunktion* (10 Punkte)

Betrachte nichtwechselwirkende Fermionen bzw. Bosonen, die Zustände λ annehmen können, mit den Operatoren $\{a_\lambda, a^+_{\lambda'}\} = \delta_{\lambda\lambda'}$ bzw. $[a_\lambda, a^+_{\lambda'}] = \delta_{\lambda\lambda'}$. Es sei $N_\lambda = a^+_\lambda a_\lambda$.

(1) Gib den Hamiltonoperator H und den Besetzungszahloperator N an.

(2) Sei $\varrho = \mathrm{e}^{-\beta(H-\mu N)}$ der Dichteoperator des vorliegenden großkanonischen Ensembles. Berechne zunächst die *Zustandssumme* $Z = \mathrm{Spur}(\varrho)$ und damit die mittlere Besetzungszahl $n_\lambda = \frac{1}{Z}\mathrm{Spur}(\varrho N_\lambda)$ im Zustand λ für beide Teilchensorten.