Anwesenheitsübungen IX

16. Dezember bis 18. Dezember

A9.1 *Kontra- und Kovarianz*

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^4$ mit der *Minkowskimetrik* $g = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ und

$$\langle x, x' \rangle := \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x'^\nu = c^2 t t' - x^1 x'^1 - x^2 x'^2 - x^3 x'^3 =: x^0 x'^0 - \vec{x} \cdot \vec{x}'$$

für *Vierervektoren*

$$x = \begin{pmatrix} c\,t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen Abbildungen $x \mapsto \Lambda x$, in Komponenten: $x^\mu \mapsto \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu =: \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ als Lorentztransformationen, wenn $\langle \Lambda x, \Lambda x \rangle = \langle x, x \rangle$, was auf $\Lambda^T g \Lambda = g$ als Bedingung an Λ führt. Die so definierten Vierervektoren nennt man *kontravariant.* Die zugehörigen *kovarianten* "Vektoren" (mit untenstehenden Indizes) definiert man als

$$x_{\mathrm{kov}} = (c\,t, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\vec{x}^T) = x^T g,$$

in Komponenten: $x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu =: g_{\mu\nu} x^\nu$. Damit gilt dann

$$\langle x, x' \rangle = x_{\mathrm{kov}} \cdot x' = x_\mu x'^\mu = x'_\mu x^\mu = x'_{\mathrm{kov}} \cdot x.$$

(1) Schreibe die Bedingung $\Lambda^T g \Lambda = g$ in Komponenten aus: $\Lambda^\mu{}_\kappa g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\lambda = g_{\kappa\lambda}$.

(2) Zeige $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$ und $\det\Lambda = \pm 1$, was vier Zweige liefert. Der Zweig mit $\mathbb{1}$ ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$, $\Lambda^0{}_0 \geq 1$) heißt $\mathcal{L}_+^\uparrow$, die eigentlich (keine Spiegelungen) orthochronen (Erhaltung der Zeitrichtung) Transformationen. Zeige, daß diese eine Gruppe bilden.

(3) Zeige $\langle x, x \rangle = x_{\mathrm{kov}} g^{-1} x_{\mathrm{kov}}^T = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$, wobei $g^{\mu\nu} := (g^{-1})_{\mu\nu}$, also hier $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

(4) Zeige, daß bei einer Lorentztransformation $x_{\mathrm{kov}} \mapsto x_{\mathrm{kov}} \Lambda^{-1}$ gilt. Zeige für die inverse Matrix in Komponenten: $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g_{\nu\beta} \Lambda^\beta{}_\alpha g^{\alpha\mu} =: \Lambda_\nu{}^\mu$, d.h. $x_\mu \mapsto \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$.

(5) Wir definieren die Ableitungen $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ und $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Zeige, daß sich die Ableitung nach kontravarianten Koordinaten als kovarianter Vierervektor transformiert ("ein oberer Index im Nenner ist ein unterer Index") und umgekehrt.

(6) Zeige für den Wellenoperator, daß $\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_\mu \partial^\mu$ und folgere seine Lorentz–Invarianz. Man kann den Wellenoperator als Minkowski–Laplaceoperator interpretieren, die Drehinvarianz von Δ mutiert dabei zur Lorentz–Invarianz von $\Box$.

A9.2 *Kovariante Elektrodynamik*

(1) Für eine Ladungs- und Stromverteilung definieren wir $j^0 = c\varrho$, $j^i = (\vec{\jmath})^i$. Zeige, daß sich die Kontinuitätsgleichung als $\partial_\mu j^\mu = 0$ schreiben läßt. Wieso folgt, daß j ein Vierervektor ist, d.h. bei Lorentztransformationen gilt: $j'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x)$.

(2) Sei in einem System $\vec{\jmath} = 0$. Wie lautet j in einem relativ dazu mit $\vec{v}$ bewegten System? Folgere, daß die Gesamtladung $q = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r\, j^0(x)$ invariant unter Lorentztransformationen ist, obwohl diese Größe nicht manifest kovariant ist.
(3) Für die elektromagnetischen Potentiale definieren wir $A^0 = \Phi$, $A^i = (\vec{A})^i$. Zeige, daß die Maxwellgleichungen $\Box A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} j^\mu(x)$ lauten, in Lorentzeichung $\partial_\mu A^\mu = 0$. Wieso folgt, daß A ein Vierervektor ist, d.h. bei Transformationen gilt: $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$. Wieso gilt die Lorentzeichung in jedem Inertialsystem?
(4) Wir definieren den elektromagnetischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Warum ist dieser invariant unter Eichtransformationen $A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu \chi$? Zeige, daß die inhomogenen Maxwellgleichungen $\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \frac{4\pi}{c} j^\nu(x)$ lauten. Wie transformiert sich $F^{\mu\nu}$ unter Lorentztransformationen? Schreibe F als Matrix und drücke die Einträge durch die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.
(5) Wie transformiert sich ein Coulombfeld in ein geboostetes System?
(6) Formuliere die homogenen Maxwellgleichungen mit dem dualen Feldstärketensor $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} F^{\gamma\delta}$. Schreibe auch $\widetilde{F}$ als Matrix.

A9.3 *Relativistische Kinematik*

Der Viererimpuls eines Teilchens mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist $p^\mu = m\dot{x}^\mu(\tau)$, wobei die Eigenzeit τ mit x^0 über $\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c\gamma}\mathrm{d}x^0$ zusammenhängt ($\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{|\vec{v}|}{c}$).
(1) Zeige, daß die Minkowski–Länge des Viererimpulses die “Masse” mc ist.
(2) Warum ist das Setzen $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ sinnvoll? Zeige $p^0 = \frac{E}{c}$ mit $E = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$.
(3) Warum kann ein Photon im Vakuum nicht in ein Elektron/Positron–Paar zerfallen? Auf welche Weise kann diese Paarbildung trotzdem stattfinden?
(4) Beim Zusammenstoß eines Protons mit einem ruhenden kann zusätzlich ein Proton/Antiprotonpaar erzeugt werden. Beide Teilchen haben die gleiche Masse. Es soll geklärt werden, wie groß die Energie sein muß, damit die Reaktion stattfindet. Benutze Viererimpulserhaltung und leite eine Bedingung an die Energie ab.
(5) Wie groß ist γ am Schwellenwert? Warum ist dieser nicht $2mc^2$?

Hausaufgaben IX

Abgabe vom 6. Januar bis 8. Januar in den Übungen

H9.1 *Überlagerung der Lorentzgruppe*

(1) Betrachte für einen Vierervektor p mit $\langle p, p\rangle = 1$ und $p^0 > 0$ die Abbildung

$$\Lambda_p\, x := x - 2\langle p, x\rangle p.$$

Zeige, daß Λ_p eine Lorentztransformation definiert.
(2) Zeige, daß $g_p = \Lambda_p \Lambda_{e_0}$ mit $(e^\mu)_0 = \delta^\mu{}_0$ eigentlich und orthochron ist.
(3) Zeige für jedes orthochrone Λ: $\Lambda e_0 = g_p e_0$ mit einem eindeutigen $p \in \mathbb{R}^{1,3}$.
(4) Folgere aus (3), daß jedes $\Lambda \in \mathcal{L}$ mit Hilfe von Parität P und Zeitumkehr T als

$$\Lambda = g_p \mathcal{O} P^\ell T^k$$

geschrieben werden kann, wobei $\mathcal{O} \in SO(3)$ und $k, \ell \in \{0, 1\}$.

Für die Drehgruppe wurde eine *Überlagerungsabbildung* $\tilde{h} : SU(2) \to SO(3)$ in der Weise definiert (TP II, A9.1), daß für gegebenes $g \in SU(2)$ die Identität

$$g\sigma(\vec{a})g^+ = \sigma(\tilde{h}(g)\vec{a}) \qquad (*)$$

für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt. Dabei war $\sigma(\vec{a}) = \sum_{i=1}^3 a^i\sigma_i$ mit den Paulimatrizen σ_i die allgemeinste Darstellung für eine hermitesche Matrix mit Spur Null.
Die Bedingung $(*)$ verallgemeinern wir durch Setzen von $\sigma(a) = a^0\mathbb{1}+\sigma(\vec{a})$ auf Vierervektoren a, was eine allgemeine hermitesche Matrix liefert. Dies definiert, wie wir im folgenden sehen werden, eine neue Überlagerung $h : SL(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{L}_+^\uparrow$. $SL(2,\mathbb{C})$ ist die Gruppe der komplexen $2\times 2-$Matrizen mit Determinante eins, diese enthält $SU(2)$.

(5) Zeige, daß h ein Homomorphismus ist: $h(g_1g_2) = h(g_1)h(g_2)$ und $h(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.
(6) Zeige, daß $h(g)$ nur für $|\det g| = 1$ eine Lorentztransformation ist und daß man sich auf $g \in SL(2,\mathbb{C})$ beschränken kann. Zeige dazu zunächst $\det\sigma(a) = \langle a, a\rangle$.
(7) Warum kann man für eine (invertierbare) Matrix A eindeutig $\sqrt{A^+A}$ definieren?
(8) Folgere aus (7), daß jede invertierbare Matrix als Produkt einer unitären und einer positiv definiten hermiteschen Matrix geschrieben werden kann.
(9) Zeige $\sigma(p)\sigma(a)\sigma(p) = \sigma(g_pa)$.
(10) Zeige mit (8) und (9), daß Bild $h = \mathcal{L}_+^\uparrow$.
(11) Folgere aus der schon bekannten Tatsache Kern $\tilde{h} = \{\pm\mathbb{1}\}$, daß Kern $h = \{\pm\mathbb{1}\}$.
(12) Zeige, daß $h(\mathrm{e}^{\frac{u}{2}\sigma_i})$ ein Boost mit Rapidität u ($\tanh u = \beta$) in i-ter Richtung ist.

(15 Punkte)

H9.2 *Die Plancksche Strahlungsformel*

Für ein Photonengas gilt $\varepsilon(\vec{p}) = c|\vec{p}\,| = \hbar ck$. Der Spin hat nur zwei Einstellungen, da elektromagnetische Wellen Transversalwellen sind (bzw. die Photonenmasse Null ist).

(1) Warum verschwindet das chemische Potential für Photonen, d.h. $\mu = 0$?
(2) Zeige, daß für die Zustandssumme im Kasten gilt: $Z = \prod_{\vec{p}\neq 0}(1 - \mathrm{e}^{-\beta c|\vec{p}\,|})^{-2}$. Wieso treten hier trotz der wegen $\mu = 0$ immer kritischen Fugazität $z = 1$ keine Komplikationen mit dem Grundzustand (wie Bose–Kondensation) auf?
(3) Zeige, daß $\Phi = -\frac{4\sigma}{3c}VT^4$, wobei σ die Stefan/Boltzmann–Konstante ist (vgl. (6)):

$$\sigma = \frac{\pi^2k^4}{60\hbar^3c^2}.$$

(4) Warum ist $\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}-1}$ die Anzahl der besetzten Zustände im Frequenzintervall $[\omega, \omega + \mathrm{d}\omega]$? Die spektrale Energiedichte $u(\omega)$ ist dieser Ausdruck, multipliziert mit der Energie pro Volumen- und Frequenzeinheit. Zeige

$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

(5) Zeige für das Maximum von u: $\hbar\omega_{\max} = 2.82kT$ (*Wiensches Verschiebungsgesetz*).
(6) Zeige, daß die pro Zeiteinheit durch die Einheitsfläche austretende Strahlenergie lautet: $I(\omega, T) = \frac{c}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega\, u(\omega)\cos\vartheta = \frac{c}{4}u(\omega)$. Folgere, daß die abgestrahlte Leistung pro Flächeneinheit $I(T) = \sigma T^4$ ist (*Stefan/Boltzmann–Gesetz*).

Dieses Gesetz wurde 1900 von M. Planck durch heuristische Annahmen gefunden und war der Anfang der Quantentheorie, da die klassische Physik (Rayleigh/Jeans) hier völlig versagt. Das Verschiebungsgesetz war vorher von M. Wien beobachtet worden.

(7) Was ist die Durchschnittstemperatur auf der Erde nach (6)? Warum ist sie höher?

(8) Berechne die Temperatur des Himmels, wenn man den folgenden Vers Jesaja 30,26 wörtlich nimmt: "Zu der Zeit, wenn der Herr die Leiden seines Volkes heilt und seine Wunden verbindet, wird das Licht des Mondes so hell sein wie das Licht der Sonne, und das Licht der Sonne wird siebenmal so stark sein wie das Licht von sieben Tagen." In der Offenbarung des Johannes ist mehrfach vom "See von brennendem Schwefel" die Rede. Schätze damit die Temperatur der Hölle ab.

(10 Punkte)

H9.3 *Drehimpulstensor*

Für ein System von N Teilchen mit Raunzeitkoordinaten x_i und Viererimpulsen p_i, $1 \leq i \leq N$ definieren wir den Tensor $M^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N}(x_i^\mu p_i^\nu - x_i^\nu p_i^\mu)$.

(1) Was hat dieser Tensor mit dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ gemeinsam?

(2) Was sind die räumlichen Komponenten M^{jk} dieses Tensors?

(3) Zeige, daß die Komponenten M^{0j} den Vektor $c\sum_{i=1}^{N}(t\vec{p}_i - \frac{1}{c^2}E_i\vec{r}_i)$ bilden.

(4) Man kann zeigen, daß $M^{\mu\nu}$ eine Erhaltungsgröße ist. Interpretiere die Konstanz von M^{0i}. Was erhält man dabei im nichtrelativistischen Grenzfall?

(5 Punkte)

---

erste Checkliste für die Klausur

Wir möchten empfehlen, folgende Themen zu wiederholen:

Clebsch/Gordan–Koeffizienten, Drehimpulsaddition: A1.1

Wigner/Eckart–Theorem: A2.1 (insbesondere Auswahlregeln), H2.1 (Anwendung des Projektionstheorems)

zeitabhängige Störungsrechnung: A3.1, A4.1 (dort hauptsächlich die Konzepte wie Fermis Goldene Regel, Interpretation der Deltadistribution als Zustandsdichte, Auswahlregeln)

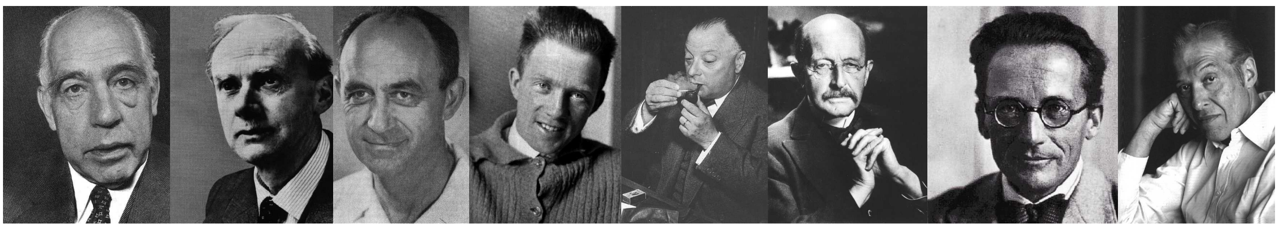
Streutheorie: A5.1 (Bornsche Näherung), A6.2 (Partialwellen)

Vielteilchentheorie: A7.1, A7.2 (wieder die Konzepte wie Impulsraumdarstellung, Ein- und Zweiteilchenoperator)

statistische Physik: A8.1 (Punkte wie Definition der Zustandssumme, Verteilungsfunktion für Bosonen und Fermionen)

Relativitätstheorie: A9.1, A9.2, A9.3, H9.1 (nur grob die Aussagen)

Niels, Paul, Enrico, Werner, Wolfgang, Max, Erwin und Julian wünschen



FROHE WEIHNACHTEN UND EIN GUTES NEUES JAHR!