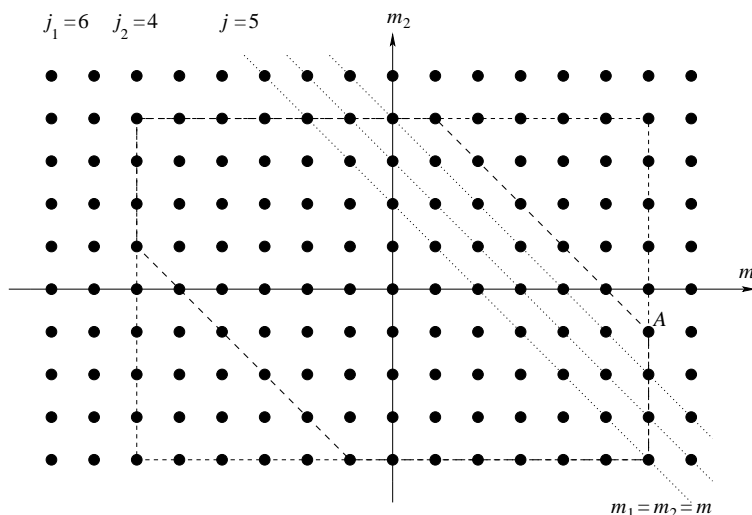


HILFREICHE GRAPHISCHE DARSTELLUNG

Um zu sehen, welche Zustände bei der Addition von Drehimpulsen auftreten können, und wie diese durch die Wirkung der Auf- und Absteigeoperatoren $J_+, J_{1,+}, J_{2,+}$ bzw. $J_-, J_{1,-}, J_{2,-}$ miteinander in Beziehung stehen, ist es hilfreich, sich dies graphisch in der (m_1, m_2) -Ebene der magnetischen Quantenzahlen zu veranschaulichen. Wir wissen, dass die *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle$ nur dann nicht verschwinden, wenn $m = m_1 + m_2$ ist.



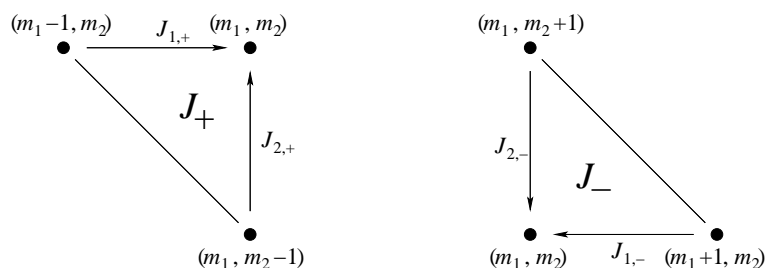
Das Bild zeigt für $j_1 = 6$ und $j_2 = 4$ die (m_1, m_2) -Ebene mit dem Gebiet aller möglichen magnetischen Quantenzahlen (das gestrichelte Rechteck). Darin eingezeichnet ist das kleinere Gebiet (das gestrichelte Sechseck), in dem die magnetischen Quantenzahlen für die irreduzible $j = 5$ Darstellung der Drehgruppe liegen müssen. Die diagonalen Linien sind genau die, für die die Summe der magnetischen Quantenzahlen konstant ist, d.h. $m_1 + m_2 = m = const.$ Durch Abzählen kann man sich ferner davon überzeugen, dass $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ sein muss.

Wir bemerken noch, dass für halbzahligen Drehimpuls die Punkte in der (m_1, m_2) -Ebene natürlich ebenfalls halbzahlige sind. Das Gitter der magnetischen Quantenzahlen ist dann verschoben, so dass der Ursprung nicht mehr ein Gitterpunkt ist.

Rekursionsbeziehung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten. Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten erfüllen zwei einfache Rekursionsbeziehungen, nämlich:

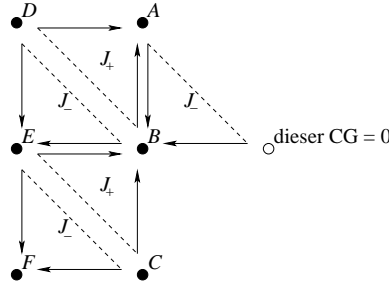
$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2; j, m \pm 1 \rangle = \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)} \langle j_1, m_1 \mp 1, j_2 m_2 | j_1 j_2; j m \rangle + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)} \langle j_1 m_1 j_2, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; j m \rangle,$$

wobei hier die Bedingung $m_1 + m_2 = m \pm 1$ gilt. Graphisch operieren diese Rekursionsbeziehungen wie folgt in der (m_1, m_2) -Ebene:



Der entscheidende Punkt ist, diese Relationen so anzuwenden, dass einer der drei involvierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten verschwindet. Dies ist zum Beispiel an den Eckpunkten der Fall. In der ersten Figur ist z.B. der Punkt A ein solcher Eckpunkt, wenn man die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für $j = 5$ ausrechnen will. An diesem

Eckpunkt gilt nämlich gerade $m_1 + m_2 = j = 5$ mit $m_1 = 6$ und $m_2 = -1$. Dies ist der maximal mögliche Wert für m_1 , so dass es keinen Punkt rechts von der durch A gehenden Linie $m_1 = 6$ geben kann.



In diesem Bild kann also durch die J_- Relation der Clebsch-Gordan-Koeffizient B durch A ausgedrückt werden. Mit der J_+ Relation kann dann D durch B und A , also allein durch A ausgedrückt werden. Mit J_- erhalten wir dann E als Funktion von A , mit J_+ dann C und mit einer weiteren J_- Relation F . Dies läßt sich so lange weitertreiben, bis man an einen Rand kommt, wo der entsprechende Clebsch-Gordan-Koeffizient verschwinden muss.

Explizite Formel für Drehmatrizen. Als kleines Bonbon sei hier noch kurz skizziert, wie man mit Hilfe von Schwinger's Darstellung der Drehimpulsalgebra durch zwei harmonische Oszillatoren ganz einfach die Matrixelemente der $SO(3)$ Drehmatrizen in beliebigen irreduziblen Darstellungen erhalten kann. Eine Drehung wird durch drei Eulerwinkel α, β, γ beschrieben, wobei in einem kartesischem Koordinatensystem mit Achsen x, y, z eine solche Drehung gegeben ist als $R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha)$. Gestrichelte Größen beziehen sich auf die bereits gedrehten Achsen. Man beachte unsere Konvention, dass wir die zweite Drehung um die y' -Achse vornehmen. In der theoretischen Mechanik wird meist die x' -Achse verwendet, aber mit den in der Quantenmechanik üblichen Konventionen ist unsere Wahl besser. Man kann nämlich zeigen, dass in der Quantenmechanik (mit der speziellen Bedeutung der z -Achse etc.) die Euler-Drehung auch vollständig in dem *ungedrehten* Achsensystem ausgedrückt werden kann, nämlich $R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$. Da Drehungen um die z -Achse diagonal operieren, ist also die einzige nicht-triviale Drehung die um die y -Achse. Zwei Darstellungen kennen wir bereits gut aus QM I:

$$\rho^{(j=1/2)}(R_y(\beta)) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix},$$

$$\rho^{(j=1)}(R_y(\beta)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \frac{1}{2}(1 - \cos \beta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \cos \beta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \beta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \frac{1}{2}(1 + \cos \beta) \end{pmatrix}.$$

Es ist allerdings ziemlich schwierig, solche Matrizen für größere j direkt auszurechnen.

Um also die Darstellung $\rho(R) = \exp(-\frac{i}{\hbar}J_y\beta)$ für ein gegebenes j zu erhalten, nutzen wir Schwinger's Realisierung der Drehimpulsalgebra.

$$\rho(R)|j, m\rangle = \frac{(\rho(R)a_+^\dagger \rho^{-1}(R))^{j+m} (\rho(R)a_-^\dagger \rho^{-1}(R))^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \rho(R)|0\rangle. \quad (1)$$

Die Wirkung von $\rho(R)$ auf $|0\rangle$ ist natürlich trivial, und sonst benötigen wir nur noch

$$\rho(R)a_\pm^\dagger \rho^{-1}(R) = \exp(-\frac{i}{\hbar}J_y\beta)a_\pm^\dagger \exp(\frac{i}{\hbar}J_y\beta) = a_\pm^\dagger \cos(\beta/2) \pm a_\mp^\dagger \sin(\beta/2),$$

was sich leicht mit der *Campbell-Baker-Hausdorff-Formel* ausrechnen läßt. Einsetzen in (1) liefert

$$\rho(R)|j, m\rangle = \sum_{k,l} \binom{j+m}{k} \binom{j-m}{l} \frac{(a_+^\dagger \cos(\beta/2))^{j+m-k} (a_-^\dagger \sin(\beta/2))^k (-a_+^\dagger \sin(\beta/2))^{j-m-l} (a_-^\dagger \cos(\beta/2))^l}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0\rangle.$$

Um nun zu den gesuchten Matrixelementen zu gelangen, muss man nun nur noch dieses Resultat mit der Entwicklung

$$\begin{aligned} \rho(R)|j, m\rangle &= \sum_{m'} |j, m'\rangle \rho_{m'm}^{(j)}(R) \\ &= \sum_{m'} \rho_{m'm}^{(j)}(R) \frac{(a_+^\dagger)^{j+m'} (a_-^\dagger)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}} |0\rangle \end{aligned}$$

vergleichen, wobei man die Koeffizienten gleicher Potenzen in den a_{\pm}^{\dagger} betrachtet. Genauer gesagt, setzt man den Koeffizienten des Terms vom Grade $j + m$ in a_{+}^{\dagger} in der oberen Gleichung mit dem Koeffizienten zum Term der Ordnung $2j - k - l$ in der unteren Gleichung in Beziehung, man indentifiziert also $l = j - k - m'$. Damit bestimmt man die $\rho_{m'm}^{(j)}$ für festgehaltenes m' . In diesem Fall sind aber die Summen über k und l in der oberen Gleichung nicht unabhängig voneinander. Mit dem gerade Gesagten läßt sich l eliminieren. Erfreulicherweise sind dann auch automatisch die Potenzen von a_{\pm}^{\dagger} gleich. Schließlich muss man nur noch die Potenzen von $\cos(\beta/2)$, $\sin(\beta/2)$ und dem Vorzeichen korrekt auseinandersortieren. Es muss also $j + m - k + l = 2j - 2k + m + m'$, $k + j - m - l = 2k - m + m'$ und $j - m - l = k - m + m'$ sein, wobei man auch hier l wieder eliminieren kann. Man erhält nach einer nicht allzu schwierigen Rechnung *Wigner's Formel* für die Matrixelemente von $SO(3)$ Drehmatrizen in der irreduziblen Spin- j Darstellung,

$$\begin{aligned} \rho_{m'm}^{(j)}(R) &= \sum_k (-)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(j-k-m')!(k-m+m')!} \\ &\times (\cos(\beta/2))^{2j-2k+m-m'} (\sin(\beta/2))^{2k-m+m'}, \end{aligned}$$

wobei die Summe über k über alle Zahlen erstreckt wird, für die keines der Argumente für die Fakultäten im Nenner negativ wird.

Bemerkung zu den Euler-Drehungen. Wie oben gesagt wurde, verwendet man in der Quantenmechanik praktischer Weise eine andere Konvention für die Definition einer Drehung durch drei Euler-Winkel, als in der klassischen Mechanik, nämlich $R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z'}(\alpha)R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)$. Dies ist deshalb vorteilhaft, weil man typischerweise, bei vorgegebener z -Richtung, einen einfachen Ausdruck für z.B. den Spinoperator \mathbf{S} im festen Koordinatensystem (x, y, z) hat, aber nicht für das bewegte Koordinatensystem des Körpers, (x', y', z') . Es ist daher sinnvoll, die Drehungen um die Körperachsen durch solche um die festen Achsen des von außen, z.B. durch ein äußeres Magnetfeld, vorgegebenen Koordinatensystems (x, y, z) auszudrücken. Glücklicherweise gilt

$$R_{y'}(\beta) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha). \quad (2)$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ist einfach: eine Drehung um den Winkel β um die Körperachse y' erhält man auch, indem man die y' -Achse zunächst durch die inverse Drehung um den Winkel $-\alpha$ um die z -Achse wieder auf die ursprüngliche y -Achse bringt, dann um diese ursprüngliche y -Achse um den Winkel β dreht, und schließlich um die *ursprüngliche* z -Achse wieder um α dreht. Man beachte, dass auch bei der letzten Drehung nicht um die Körperachse z' gedreht wird!

Die Behauptung, dass die Drehungen in (2) äquivalent sind, wollen wir hier kurz plausibel machen. Dazu mache man sich klar, dass die Orientierung der y -Körperachse in beiden Fällen die gleiche ist, nämlich in y' -Richtung. Desweiteren stimmt auch die Orientierung der z -Körperachse überein: in beiden Fällen schließt nämlich die z -Körperachse den Polarwinkel β mit der festen z -Achse ein, während der Azimuthal-Winkel, gemessen im festen Koordinatensystem, gerade α ist. Auf ähnliche Weise kann man sich klar machen, dass

$$R_{z'}(\gamma) = R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}^{-1}(\beta)$$

ist. Da wir die Drehung $R_{y'}(\beta)$ aber schon in (2) durch Drehungen um Achsen des festen Koordinatensystems ausgedrückt haben, erhalten wir offenbar

$$\begin{aligned} R_{z'}(\gamma)R_{y'}(\beta)R_z(\alpha) &= \underbrace{R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)R_{y'}^{-1}(\beta)}_{R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)}R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)R_z(\alpha) \\ &= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die Tatsache benutzt wurde, dass $R_z(\alpha)$ und $R_z(\gamma)$ kommutieren. Damit haben wir eine Drehung, gegeben durch drei Eulerwinkel, durch Drehungen um die Achsen des festen Koordinatensystems ausgedrückt. In der hier gewählten Konvention sind die Matrixelemente der Drehmatrizen $R(\alpha = 0, \beta, \gamma = 0)$ rein reell, da in der Quantenmechanik üblicherweise die Matrixelemente von S_y bzw. J_y rein imaginär gewählt werden. Dies motiviert die Wahl der y -Achse statt der x -Achse, die in der klass. Mechanik meist verwendet wird.