KOVARIANZ DER DIRAC-GLEICHUNG

In de Vorlesung haben wir die Dirac-Gleichung über das Transformationsverhalten der Spin-Operatoren unter Lorentz-Boosts hergeleitet. Die Dirac-Gleichung operiert in natürlicher Weise nicht auf Skalaren Wellenfunktionen sondern auf Vier-Spinoren. Die Operatoren, die in der Dirac-Gleichung vorkommen, haben also zwei Anteile: Einen auf den Raumzeitkoordinaten x^μ wirkenden, und einen auf dem Elementen ψ des Spinorraums wirkenden. Letztere Operatoren haben wir γ^μ definiert. Die Notation $\gamma^\mu\partial_\mu$ legt es nahe, dass ein so konstruierter Operator als Lorentz-Skalar transformiert, wir wollen uns dies jedoch noch einmal auf eine etwas andere Weise explizit klarmachen. *Achtung*: Im folgenden werden wir, zur Vereinfachung der Notation, immer $\hbar = c = 1$ setzen.

Relativistische Kovarianz. Dieser Begriff besagt genau folgendes: Für alle Beobachter, die sich relativ zueinander mit konstanten Geschwindigkeiten bewegen (also für alle Inertialsysteme) muss ein relativistisch kovarianter Ausdruck (z.B. die Dirac-Gleichung) die gleiche Form haben. Dies besagt *nicht*, dass ein solcher Ausdruck invariant unter Lorentz-Transformationen sein muss.

Zwei Inertialsysteme seien durch $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ miteinander verbunden. Bei relativistischer Kovarianz muss dann gelten:

$$\left[\gamma^\nu\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - eA_\nu(x)\right) - m\right]\psi(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \left[\gamma'^\nu\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} - eA'_\nu(x')\right) - m\right]\psi'(x') = 0\,.$$

Es brauchen hier weder die γ'^ν mit den γ^ν, noch die ψ' mit den ψ übereinzustimmen, wie ja auch das Vektorpotential gemäß $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x)$ beim Übergang von einem Inertialsystem zum anderen transformiert wird. Wir erwarten daher, dass auch die mehrkomponentigen Spinoren durch eine nichttrivialen Transformation

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x') = \rho(\Lambda)\psi(x)$$

ineinander übergehen, wobei $\rho(\Lambda)$ eine noch zu bestimmende Darstellung der Lorentzgruppe in Form von 4×4 Matrizen bezeichnet.

Beweis der Kovarianz. Wir bestimmen nun $\rho(\Lambda)$ so, dass die Dirac-Gleichung kovariant ist. Offensichtlich muss eine Transformation auch umgekehrter Richtung möglich sein, so dass also $\rho^{-1}(\Lambda) = \rho(\Lambda^{-1})$ existieren muss. ρ darf also nicht singulär sein. Wir wissen auch aus der Vorlesung, dass die γ-Matrizen sich wie ein Lorentz-Vektor transformieren. Die Herleitung der Form der γ-Matrizen über das Transformationsverhalten der Spin-Operatoren läßt sich in jedem Inertialsystem durchführen. Daher ist offensichtlich $\gamma'^\mu = \gamma^\mu$. Wir müssen also nur x in x', ∂ in ∂' und A in A' umrechnen. Es gilt aufgrund der Kettenregel und der Identität $\eta\Lambda\eta = (\Lambda^t)^{-1} = (\Lambda^{-1})^t$:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}\,,\quad A'_\mu(x') = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu A_\nu(x)\,.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir für die transformierte Dirac-Gleichung

$$\left[\gamma^\nu(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu} - eA_\mu(x)\right) - m\right]\rho(\Lambda)\psi(x) = 0\,.$$

Multiplizieren wir das mit ρ^{-1} durch, so erhalten wir die ursprüngliche Dirac-Gleichung genau dann, wenn $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\rho^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\rho(\Lambda) = \gamma^\nu$ gilt, bzw.

$$\rho^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\rho(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\,.$$

Aus dieser Bedingung kann, für gegebenes Λ, die Matrix ρ bestimmt werden. Diese ist jedoch nicht eindeutig, da für eine Lösung ρ auch $a\rho$ für jede beliebige Zahl a eine Lösung ist. Berücksichtigt man jedoch noch die Hermitezitäts-Bedingungen $\overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu$ mit $\overline{\gamma^\mu} \equiv \gamma^0\gamma^{\mu+}\gamma^0$, so muss zusätzlich noch

$$\rho(\Lambda)\overline{\rho(\Lambda)}\gamma^\mu = \gamma^\mu\rho(\Lambda)\overline{\rho(\Lambda)}$$

gelten. Die Matrix $\rho(\Lambda)\overline{\rho(\Lambda)}$ muss also mit allen Matrizen der Clifford-Algebra vertauschen. Dies ist nach dem Schurschen Lemma nur für ein Vielfaches der Identität möglich. Die noch freie Normierungskonstante setzen wir der Einfachheit halber gleich eins. Dann gilt $\overline{\rho(\Lambda)} = \rho^{-1}(\Lambda)$, und unsere Bedingung nimmt die Form

$$\overline{\rho(\Lambda)}\gamma^\mu\rho(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \qquad (*)$$

an. Eine qualitative Aussage kann man hier direkt ablesen. Für gegebenes Λ ist dies quasi eine quadratische Gleichung für ρ. Ist z.B. Λ eine Drehung um den Winkel θ, so wird ρ eine Transformation sein, in die der Parameter als $\theta/2$ eingeht. Dies erklärt, warum bei Spinoren Drehungen mit dem halben Drehwinkel erfolgen. Die Dirac-Gleichung ist also kovariant, wenn wir eine solche Darstellung $\rho(\Lambda)$ konstruieren. Die Spinoren transformieren sich dann gemäß

$$\psi'(x') = \rho(\Lambda)\psi(x)\,.$$

Hat man die Darstellung ρ gefunden, so folgt damit auch das Transformationsverhalten aller anderen Observablen. So gilt z.B. für den Strom $j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ ganz offensichtlich

$$j'\mu(x') = \overline{\psi'}(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \overline{\psi}(x)\overline{\rho(\Lambda)}\gamma^\mu\rho(\Lambda)\psi(x) = \overline{\psi}(x)\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x)\,,$$

was für einen Vier-Vektor auch so sein sollte. Analog folgt das Transformationsverhalten für den Skalar $\overline{\psi}\psi$, sowie den Tensor, den axialen Strom und den Pseudoskalar.

Konstruktion von $\boldsymbol{\rho}$. Die Matrizen $\rho(\Lambda)$ sind, genau wie die Λ selbst, 4×4 Matrizen, die aber nicht auf der Raumzeit operieren, sondern im Spinorraum. Wir werden getrennt die eigentlichen Lorentz-Transformationen und die Spiegelungen behandeln, da erstere non kontinuierlichen Parametern abhängen. Die eigentlichen Lorentz-Transformationen bilden die Untergruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$, definiert durch $\det(\Lambda) = 1$ und $\Lambda^0{}_0 \geq 1$.

Eine beliebige eigentliche Lorentz-Transformation hängt von sechs Parametern ab, den drei Boost-Rapiditäten χ^k für die drei Raumrichtungen x^k, $k = 1, 2, 3$, und den drei Euler-Winkeln θ^k für Drehungen im Raum. Eine infinitesimale Transformation hat daher die Form

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & -\chi^1 & -\chi^2 & -\chi^3 \\ -\chi^1 & 1 & -\theta^3 & \theta^2 \\ -\chi^2 & \theta^3 & 1 & -\theta^1 \\ -\chi^3 & -\theta^2 & \theta^1 & 1 \end{pmatrix} + \ldots$$

in erster Ordnung. Der Generator dieser infinitesimalen Transformation ist dann gegeben durch $\omega^\mu{}_\nu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu$, hat also auf der Diagonalen nur Nullen. Wenn wir nun noch den einen Index mit Hilfe der Metrik $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ herunterziehen, so erhalten wir für den Generator

$$(\omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\chi^1 & -\chi^2 & -\chi^3 \\ \chi^1 & 0 & \theta^3 & -\theta^2 \\ \chi^2 & -\theta^3 & 0 & \theta^1 \\ \chi^3 & \theta^2 & -\theta^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist vollständig antisymmetrisch, $\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu}$. Für kleine Drehwinkel und Geschwindigkeiten sind Lorentz-Transformationen damit gegeben durch $\Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\mu} + \omega_{\mu\nu} + \ldots$, wobei $\omega_{\mu\nu}$ eine beliebige antisymmetrische Matrix ist.

Wir können nun $\rho(\Lambda)$ bestimmen. Dazu machen wir, analog zur Bestimmung der unitären Darstellung für die Drehgruppe SO(3) via $U(\boldsymbol{\theta}) = 1\!\!1 - \mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\mathbf{J}$, den Ansatz

$$\rho(\Lambda) = 1\!\!1 - \frac{\mathrm{i}}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \ldots\,,$$

wobei die $\sigma^{\mu\nu}$ Elemente der Clifford-Algebra sind (also aus den Dirac-Matrizen gebildet werden können). Aufgrund der Antisymmetrie der $\omega_{\mu\nu}$ bezüglich der Indizes können auch die $\sigma^{\mu\nu}$ antisymmetrisch gewählt werdenm $\sigma^{\nu\mu} = -\sigma^{\mu\nu}$. Setzen wir diesen Ansatz in die Bedingung $(*)$ ein und vergleichen wir die in $\omega_{\mu\nu}$ linearen Terme, so erhalten wir nach einer kleinen Rechnung

$$[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] = -2\mathrm{i}(\eta^{\mu\lambda}\gamma^\nu - \eta^{\nu\lambda}\gamma^\mu)\,. \qquad (**)$$

An dieser Stelle wollen wir uns kurz ein paar Kleinigkeiten zur Drehimpulsalgebra in Erinnerung rufen. Für einen Vektor v unter SO(3) gilt

$$[J_k, v_l] = \mathrm{i}\sum_m \varepsilon_{klm}v_m\,.$$

Wir definieren einen antisymmetrischen Tensor (zweiter Stufe) durch $J_{rs} = \sum_n \varepsilon_{rsn}J_n$. Dies ist der korrekte antisymmetrische Tensor, der zum axialen Vektor **J** gehört. Die definierende Gleichung für einen Vektor (bezüglich der Drehgruppe) kann dann auch geschriebenwerden als

$$[J_{rs}, v_l] = \mathrm{i}(\delta_{rl}v_s - \delta_{sl}v_r)\,,$$

was in der Form ganz genau der Gleichung $(**)$ entspricht. Der unterschiedliche Faktor zwei rührt von der Definition $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ her.

Mit dieser kleinen Zwischenbemerkung können wir sofort angeben, was $\sigma^{\mu\nu}$ ist. Dies muss der antisymmetrische Tensor zweiter Stufe sein, der dem Generator von Lorentz-Transformationen zugeordnet ist, so dass γ^μ bezüglich dieses Tensors als Vier-Vektor transformiert. Außerdem muss $\sigma^{\mu\nu}$ aus den γ-Matrizen aufgebaut sein, und die Lösung ist natürlich

$$\sigma^{\mu\nu} \propto \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu \,.$$

Dieser Operator $\sigma^{\mu\nu}$ ist also, bis auf eine Normierung, identisch zu dem Spin-Tensor, den wir in der Vorlesung bei der Ableitung der Dirac-Gleichung konstruiert hatten,

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \,.$$

Dies bestätigt einmal mehr, dass $\sigma^{\mu\nu}$ als Generator in der Tat die korrekte Verallgemeinerung der Pauli-Matrizen darstellt. Wir können nun $\rho(\Lambda)$ explizit angeben,

$$\rho(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \,.$$

Drücken wir den Tensor $\omega_{\mu\nu}$ durch den Rapiditätsvektor $\boldsymbol{\chi}$ und den Rotationsvektor $\boldsymbol{\theta}$ aus, so läßt sich dies auch in der Form

$$\rho(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\chi} - \frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)$$

angeben, wobei $\boldsymbol{\tau} = \left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{smallmatrix}\right)$ wie im Handout VIII definiert ist.

Diskrete Lorentz-Transformationen. Wir wollen nun noch schnell die Darstellungen ρ für die räumliche Spiegelung $\mathcal{P} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, die Zeitumkehr $\mathcal{T} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ und die Ladungskonjugation $\mathcal{C}$, die Teilchen und Antiteilchen vertauscht, angeben.

Aus der Bedingung $(*)$ folgt für die Raumspiegelung $\mathcal{P}$ sofot

$$\overline{\rho(\mathcal{P})}\gamma^0\rho(\mathcal{P}) = \gamma^0 \,, \quad \overline{\rho(\mathcal{P})}\gamma^k\rho(\mathcal{P}) = -\gamma^k \,.$$

Da die γ-Matrizen antikommutieren, ergibt sich

$$\rho(\mathcal{P}) = \eta_{\mathcal{P}}\gamma^0 \,.$$

Hierbei ist $\eta_{\mathcal{P}}$ eine beliebige Phase, $|\eta_{\mathcal{P}}| = 1$, so dass die Parität eines Dirac-Spinors nicht eindeutig festgelegt ist. Man könnte nun fordern, dass $\rho(\mathcal{P}^2) = \mathbb{1}$ sein sollte, da eine Spiegelung eine Involution ist. Bei Spinoren ist allerdings die Identität zweideutig, $\mathbb{1}$ und $-\mathbb{1}$, so dass man vier Möglichkeiten $\eta_{\mathcal{P}} \in \{\pm1, \pm\mathrm{i}\}$ hat. Physikalisch sind aber vor allem relative Paritäten wichtig. Mit der expliziten Form von γ^0 in der Standard-Darstellung sieht mam, dass unabhängig von der Wahl von $\eta_{\mathcal{P}}$ die relaitve Parität der oberen und unteren beiden Komponenten des Spinors immer negativ ist, da

$$\rho(\mathcal{P}) = \eta_{\mathcal{P}}\gamma^0 = \eta_{\mathcal{P}}\begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix}$$

gilt. Ferner rechnet man schnell nach, dass γ^5 ein Pseudoskalar ist. Zum einen gilt $\gamma^5\sigma^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}\gamma^5$, so dass γ^5 unter eigentlichen Lorentz-Transformationen invariant ist. Zum anderen gilt aber $\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^5$, so dass unter Raumspiegelungen

$$\overline{\rho(\mathcal{P})}\gamma^5\rho(\mathcal{P}) = -\gamma^5$$

wird. Analog kann man das Verhalten von $\sigma^{\mu\nu}$ und von $\gamma^5\gamma^\mu$ unter Raumspiegelungen ableiten.

Für die Zeitumkehr findet man auf ähnliche Weise das Resultat

$$\rho(\mathcal{T}) = \eta_{\mathcal{T}}\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

mit $\eta_{\mathcal{T}}$ wieder einem reinen Phasenfaktor, und für die Kombination $\mathcal{PT} : x \mapsto x' = -x$ der Raum-Zeit-Spiegelung findet man

$$\rho(\mathcal{PT}) = \eta_{\mathcal{P}}\eta_{\mathcal{T}}\gamma^5 \,.$$

Die Ladungskonjugation $\mathcal{C} : \psi \mapsto \psi^{\mathcal{C}}$ ist bezüglich der eigentlichen Lorentzgruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ invariant, denn Teilchen und Antiteilchen sollen genau die gleichen Wellengleichugen erfüllen, wobei für Antiteilchen die Ladung e durch $-e$ zu ersetzen ist. Es soll also gelten

$$[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu - eA_\mu) - m]\,\psi(x) = 0 \quad \Longrightarrow [\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + eA_\mu) - m]\,\psi^{\mathcal{C}}(x) = 0 \,.$$

Zunächst findet man, dass der adjungierte Spinor $\overline{\psi}$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$\left[\gamma^{\mu\,t}(\mathrm{i}\partial_\mu + eA_\mu) + m\right]\overline{\psi}^t(x) = 0\,.$$

Um das Vorzeichen vor dem Masseterm zu korrigieren, suchen wir eine Matrix $\mathcal{C}$ mit der Eigenschaft $\mathcal{C}\gamma^{\mu\,t}\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^\mu$. Es läßst sich leicht nachprüfen, dass die Matrix

$$\mathcal{C} = -\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2 = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

die gesuchte Eigenschaft besitzt (in der Standarddarstellung). Weitere Eigenschaften von $\mathcal{C}$ sind $\mathcal{C} = -\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}^+ = \overline{\mathcal{C}} = +\mathcal{C}^t$ und $\mathcal{C}^2 = -\mathbb{1}$. Die Dirac-Gleichung für den adjungierten Spinor können wir umschreiben zu

$$\mathcal{C}^{-1}\left[\mathcal{C}\gamma^{\mu\,t}\mathcal{C}^{-1}(\mathrm{i}\gamma_\mu + eA_\mu) + m\right]\mathcal{C}\overline{\psi}^t(x) = 0\,.$$

Mutliplizieren mit $\mathcal{C}$ und Einsetzen der Transformation von γ^μ unter $\mathcal{C}$ liefert schließlich

$$\left[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu + eA_\mu) - m\right]\mathcal{C}\overline{\psi}^t(x) = 0\,,$$

so dass der *ladungskonjugierte Spinor* gegeben ist als

$$\psi^{\mathcal{C}}(x) = \mathcal{C}\overline{\psi}^t(x) = -\gamma^0\mathcal{C}\psi^*(x)\,.$$

Bein Übergang in ein anderes Inertialsystem führt dies zu

$$(\psi')^{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\overline{\psi'}^t = \mathcal{C}(\overline{\rho(\Lambda)\psi})^t = \mathcal{C}(\overline{\psi}\;\overline{\rho(\Lambda)})^t = \mathcal{C}\overline{\rho(\Lambda)}^t\overline{\psi}^t = \mathcal{C}\overline{\rho(\Lambda)}^t\mathcal{C}^{-1}\psi^{\mathcal{C}}\,.$$

Hier tritt eine Transformation von ρ auf, die motiviert, für jede Dirac-Matrix G ihre ladungskonjugierte Matrix $G^{\mathcal{C}}$ zu definieren. Für die Parität $\beta = \gamma^0$ finden wir z.B. $\gamma^{0\,\mathcal{C}} = \mathcal{C}\overline{\gamma^0}^t\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}\gamma^{0\,t}\mathcal{C}^{-1} = -\gamma^0$, und für die $\sigma^{\mu\nu}$ folgt aus

$$\mathcal{C}(\overline{\gamma^\mu\gamma^\nu})^t\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}(\gamma^\nu\gamma^\mu)^t\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}\gamma^{\mu\,t}\gamma^{\nu\,t}\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}\gamma^{\mu\,t}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\gamma^{\nu\,t}\mathcal{C}^{-1} = \gamma^\mu\gamma^\nu$$

die Invarianz $(\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu})^{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(\overline{\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}})^t\mathcal{C}^{-1} = \mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}$. Dies impliziert, dass auch $\rho(\Lambda)^{\mathcal{C}} = \rho(\Lambda)$ gelten muss, so dass für eigentliche Lorentz-Transformationen die ladungskonjugierten Spinoren gemäß

$$(\psi')^{\mathcal{C}} = \rho(\Lambda)\psi^{\mathcal{C}}$$

transformierem, während bei Spiegelungen hier ein Vorzeichen auftritt.

Helizität. In A10.2 wurden die Weyl-Gleichungen behandelt, also der Fall von *masselosen* Spin $1/2$ Teilchen. Dabei wurde auch gezeigt, dass für Lösungen positiver Energie Spin und Impuls parallel sind, für Lösungen negativer Energie hingegen antiparallel zeigen. Es macht daher Sinn, nach den Eigenzuständen des Helizitätsoperators zu fragen, der genau die relative Ausrichtung von Spin und Impuls mißt. Dieser ist definert als

$$\mathcal{L} \equiv \boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{p}}{|\mp p}\,.$$

Die freien Lösungen der Dirac-Gleichung konnten wir in der Vorlesung in zwei Zwei-Spinoren aufspalten, $u = \binom{\varphi}{\chi}$, die das gekoppelte Gleichungssystem

$$\left[\begin{pmatrix} p^0 - m & 0 \\ 0 & -p^0 - m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} = 0$$

lösen. Damit hängen die beiden Zwei-Spinoren via $\chi = (p^0+m)^{-1}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\varphi$ miteinander zusammen. Ist nun φ ein Eigenzustand zu $\mathcal{L}$ mit Eingenwert λ, genauer $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mp}p\varphi = \lambda\varphi$, dann ist in der Tat der ganze Vier-Spinor u ein Eigenzustand zu $\mathcal{L}$ mit Eigenwert λ. Ein solcher Eigentzustand hat die Form

$$u_\lambda(p) = \begin{pmatrix} \varphi_\lambda(p) \\ \frac{|\mathbf{p}|}{p^0+m}\lambda\varphi_\lambda(p)\end{pmatrix}.$$

Die Weyl-Gleichungen sind gerade so konstruiert (durch Wahl einer dafür besser geeigneten Basis der Dirac-Matrizen), dass ihre Lösungen, die *Weyl-Spinoren*, gerade Eigenzustände des Helizitätsoperators sind.

Es besteht nun ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Spin-Operator $\boldsymbol{\tau}$ und den Matrizen $\boldsymbol{\alpha}$, nämlich $\boldsymbol{\tau} = \gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = \gamma^5\boldsymbol{\alpha}$. Damit, und mit $u_\lambda(p) = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\mathbf{p}}u_\lambda(p)$, sieht man schnell ein, dass für *masselose* Spinoren die Eigenwerte von γ^5 gerade die Helizitätseigenwerte sind, $\gamma^5 u_\lambda(p) = \lambda u_\lambda(p)$. Für *massive* Spinoren gilt das so nicht mehr, man kann diese aber auf entsprechende Komponenten projizieren:

$$\psi_R(x) \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi(x)\,, \quad \psi_L(x) \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi(x)\,, \quad \psi(x) = \psi_R(x) + \psi_L(x)\,.$$

Diese Anteile werden *rechts*- bzw. *links-chirale* Anteile genannt, da sie Eigenzustände zu γ^5 mit Eigenwerten ± 1 sind. Diese Eigenwerte heißen *Chiralitäten* der Spinoren. Haben die Spinoren eine Masse, so zeigt die Zeitentwicklung eine Oszillation, so dass die Amplituden der chiralen Anteile des vollen Spinors ständig wechseln,

$$\psi_R(t) = \psi_R(t=0)\cos(mt)\,, \quad \psi_L(t) = \psi_L(t=0)\sin(mt)\,.$$

Wieder ist $\hbar = c = 1$, ansonsten würde das Argument der trigonometrischen Funktionen $\frac{mc^2}{\hbar}t$ lauten. Man nennt γ^5 daher auch Chiralitätsoperator, so wie γ^0 der Paritätsoperator ist.

ALTERNAITVE DARSTELLUNGEN

In der Vorlesung haben wir ausschließlich mit der Standarddarstellung der Dirac-Matrizen gearbeitet. In A10.2 wurde eine alternative Darstellung der Dirac-Matrizen verwendet, die für den masselosen Fall besser geeignet ist. Wir wollen hier kurz die wichtigsten Darstellungen auflisten. Gemeinsam ist allen, dass sie eine vier-dimensionale Darstellung der Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \delta^{\mu\nu}$ bilden.

Standarddarstellung. Diese war gegeben durch die Matrizen (es ist $k = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1 \\ 1\!\!1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\beta &= \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der Chiralitätsoperator ist in dieser Darstellung γ^5, der die Eigenschaften $(\gamma^5)^2 = 1\!\!1$ und $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ hat. Man findet übrigens häufig die von Feynman eingeführte Abkürzung $\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu$. Eine wichtige Formel ist in dieser Notation $\not{a}\,\not{b} = a\cdot b - \mathrm{i}a^\mu b^\nu \sigma_{\mu\nu}$, wobei wieder $\sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ist. Dies ist der vollständig antisymmetrische Spin-Tensor, also $\sigma_{\nu\mu} = -\sigma_{\mu\nu}$. Wichtig sind noch Ausdrücke von Prdoukten von Dirac-Matrizen, besonders $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$, $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu$, $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho}$ und $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu$.

Chirale Darstellung. Diese Darstellung ist gegeben durch die Matrizen

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \beta = \begin{pmatrix} 0 & -1\!\!1 \\ -1\!\!1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \\
\sigma_{0k} &= \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_0, \gamma_k] = -\mathrm{i}\alpha_k = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix}, \\
\sigma_{jk} &= \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_j, \gamma_k] = -\frac{\mathrm{i}}{2}[\alpha_j, \alpha_k] = -\varepsilon_{jkl}\begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Majorana Darstellung. Diese Darstellung wird verwendet, wenn man rein reelle Spinoren betrachten möchte. Es gibt zwei äquivalente Möglichkeiten, nämlich

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}$$

oder

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Dirac-Spinor besteht aus zwei Majorana-Spinoren. Majorana-Spinoren sind, wie gesagt, rein reell. In der Majorana-Darstellung ist aber auch die Dirac-Gleichung rein reell, so dass mit ψ auch $\psi^{\mathcal{C}}$ eine Lösung ist. In dieser Darstellung ist die ladungskonjugierte Lösung daher, bis auf einen willkürlichen Phasenfaktor, durch $\psi^{\mathcal{C}} = \psi^*$ gegeben. Wenn ψ eine Lösung mit Ladung e ist, so ist ψ^* eine Lösung zur Ladung $-e$. Daher beschreibt ein rein reeller Spinor $\psi = \psi^*$ offenbar neutrale Fermionen, genau wie eine rein reelle Lösung der Klein-Gordon-Gleichung mit neutralen Bosonen in Beziehung gesetzt wurde.

Es ist oft nützlich, einen Spinor auf bestimmte Komponenten bzw. Anteile projizieren zu können. Neben der weiter oben kurz skizzierten Projektion auf die chiralen Anteile sind dies die Projektion auf positive bzw. negative Energie und die Projektion auf Spin-Komponenten. Zunächst machen wir uns klar, dass ein Spinor als Lösung der Dirac-Gleichung allein natürlich nicht eindeutig festgelegt ist. Ein Spinor $u(p,n)$ ist ein Spinor mit Vierer-Impuls p, der in folgender Weise eine Polarisierung besitzt: Es sei n ein Vierer-Vektor, so dass das Teilchen in seinem Ruhesystem in Bezug auf **n** den Spin $+\frac{1}{2}$ besitzt. Der Vierer-Vektor n ist dann durch die Lorentz-Transformation gegeben, die den Impuls $(m,\mathbf{0})$ auf p boostet, und $(0,\mathbf{n})$ auf n, wobei der Boost übrigens nicht parallel zur Polarisationsrichtung sein muss. Genauer ist n ein raumartiger Einheitsvektor, $n^\mu n_\mu = -1$, der auf dem Referenzimpuls k^μ senkrecht steht. Da für massive Teilchen der Referenzimpuls zeitartig ist, ist $n^0 = 0$. Eine Lösung der Dirac-Gleichung ist dann, bis auf ihre Normierung, durch die Polarisationsbedingung eindeutig bestimmt:

$$\gamma^5 \not{n}\, u(p,n) = +u(p,n)\,.$$

Energie-Projektoren. Die Dirac-Gleichung und die Polarisationsbedingung legt einen Spinor bis auf Normierung eindeutig fest. Für konkrete Betrachtungen ist es hilfreich, Projektionsmatrizen einzuführen, die diese beiden Bedingung garantieren. Die Matrix

$$\mathcal{E}_+(p) \equiv \frac{\not{p}+m}{2m}$$

projiziert einen Spinor auf die Lösungen der Dirac-Gleichung mit positiver Energie, denn es gilt

$$(\not{p}-m)(\not{p}+m) = p^2 - m^2 = 0\,.$$

Es genügt daher der Ausdruck $\mathcal{E}_+(p)\psi$ für einen beliebigen Spinor ψ immer der Dirac-Gleichung. Ganz analog erhält man den Projektor auf die Lösungen negativer Energie als

$$\mathcal{E}_-(p) = (\mathcal{E}_+(p))^{\mathcal{C}} = \frac{-\not{p}+m}{2m}\,.$$

Polarisations-Projektoren. Um auf eine gewünschte Polarisationsrichtung zu projizieren, verwendet man die Matrix

$$P(n) \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5 \not{n})\,, \quad \gamma^5 \not{n} P(n) = 0\,.$$

Die Matrix γ^5 hat bekanntermaßen die Darstellung $\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{\mathrm{i}}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$, wobei $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der vollkommen antisymmetrische Tensor vierter Stufe ist, d.h. $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 1$ für $(\mu\nu\rho\sigma)$ eine gerade Permutation von (0123), $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -1$ für $(\mu\nu\rho\sigma)$ eine ungerade Permutation von (0123), und $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ in allen anderen Fällen. Es ist dann für einen beliebigen Spinor ψ der Ausdruck $P(n)\psi$ ein Spinor mit Polarisation in Richtung von **n**. Insgesamt gitl

$$P(n)\mathcal{E}_+(p)u(p,n) = \mathcal{E}_+(p)P(n)u(p,n) = u(p,n)\,.$$

Daraus, und durch direktes Nachrechnen, folgen die üblichen Eigenschaften für Projektoren, $(\mathcal{E}_+(p))^2 = \mathcal{E}_+(p)$ und $(P(n))^2 = P(n)$. Die Polarisations-Projektoren werden auch als Spin-Projektoren bezeichnet. Es gelten nämlich im Ruhesystem die Eigenwertgleichungen $\boldsymbol{\tau}\cdot n\, u(k,n) = u(k,n)$ und $\boldsymbol{\tau}\cdot n\, v(k,n) = -v(k,n)$, wobei u und v die Standard-Spinoren der freien Lösungen der Dirac-Gleichung im Ruhesystem sind, d.h. u ist eine Linerakombination der $u^{(+)}_{\mathbf{p}=0,\sigma}$ und v ist eine Linerakombination der $u^{(-)}_{\mathbf{p}=0,\sigma}$. Natürlich kann man auch auf die Polarisationsrichtung entgegengesetzt zu **n** projizierenm, und zwar mit $P(-n) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5 \not{n})$.

Folgende Eigenschaften sind noch erwähnenswert. Zum einen kommutieren die Energie- und Polarisationsprojektoren, $[\mathcal{E}_\pm(p), P(n)] = 0$, zum anderen läßt sich die Identität wie folgt aus den Projektoren zusammensetzen:

$$\mathcal{E}_+(p)P(n) + \mathcal{E}_-(p)P(n) + \mathcal{E}_+(p)P(-n) + \mathcal{E}_-(p)P(-n) = \mathbb{1}\,.$$

Schließlich gilt für die Spur $\mathrm{tr}\mathcal{E}_\pm(p)P(\pm n) = 1$.

Wenn nun n so gewählt wird, dass **n** parallel zu **p** ist – diese Polarisationsrichtung sei mit $n_\mathbf{p}$ bezeichnet – dann gilt insbesondere

$$P(n_\mathbf{p})\mathcal{E}_\pm(p) = \left(\mathbb{1} \pm \frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)\mathcal{E}_\pm(p)\,.$$

Also projiziert $P(n_\mathbf{p})$ Zustände mit positiver Energie auf Zustände positiver Helizität, und Zustände negativer Energie auf Zustände negativer Helizität. Die Polarisationsrichtung $n_\mathbf{p}$ ist übrigens explizit durch $n_\mathbf{p} = (|\mathbf{p}|/m, p^0\hat{\mathbf{p}}/m)$ gegeben, und es gilt in der Tat $(n_\mathbf{p})^2 = -1$ und $n_\mathbf{p}\cdot p = 0$. Analog gilt natürlich

$$P(-n_\mathbf{p})\mathcal{E}_\pm(p) = (\mathbb{1} \mp \boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\mathbf{p}})\,\mathcal{E}_\pm(p)\,,$$

so dass $P(-n_\mathbf{p})$ Spinoren positiver Energie auf negative Helizität und Spinoren negativer Energie auf positive Helizität projiziert.