

DAS KOMPLEXE KLEIN-GORDON-FELD

In der Vorlesung haben wir das reelle Klein-Gordon-Feld betrachtet, das spinlose Teilchen ohne elektrische Ladung beschreibt. Ein reelles Klein-Gordon-Feld hat die Modenentwicklung

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2k^0}} (a(\mathbf{k})e^{ik \cdot x} + a^+(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x}) ,$$

wobei die zueinander konjugierten Erzeuger- und Vernichtoperatoren die kanonischen Vertauschungsrelationen $[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ erfüllen (alle anderen Kommutatoren verschwinden). Ein solches Feld ist die quantisierte Lösung der Klein-Gordon-Gleichung, die man als Bewegungsgleichung der reellen Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} : ((\partial - \mu\phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2) :$$

erhält (hier bereits in Normalordnung geschrieben). Das reelle Feld ϕ ist selbstadjungiert, $\phi^+ = \phi$, und hat den kanonisch konjugierten Impuls $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$. Dieses Feld kann kanonisch quantisiert werden, was die kanonischen Vertauschungsregeln $[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ liefert.

Lagrange-Dichte. Beim komplexen Klein-Gordon-Feld muss man ϕ^+ als von ϕ unabhängiges Feld betrachten. Eine mögliche Lagrange-Dichte ist dann

$$\mathcal{L} = : ((\partial_\mu \phi^+)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^+ \phi) : .$$

Damit ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{cases} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^+)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^+} = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0, \\ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi^+(x) = 0. \end{cases}$$

Die konjugierten Felder sind natürlich $\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi^+ = \dot{\phi}^+(x)$ und $\pi^+(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^+)} = \partial^0 \phi = \dot{\phi}(x)$.

Ladung. Die Lagrange-Dichte ist im Grunde eine Sesquilinearform in ϕ und ϕ^+ . Sie ist invariant unter Eichtransformationen der ersten Art, d.h. unter globalen Eichungen der Form $\phi(x) \mapsto \phi'(x) = e^{i\lambda} \phi(x) \approx (1 + i\lambda)\phi(x)$ für beliebiges reelles λ , wobei die Näherung natürlich nur für kleine $|\lambda|$ gültig ist. Für das hermitesch konjugierte Feld gilt entsprechend $\phi^+(x) \mapsto \phi^{+\prime}(x) = e^{-i\lambda} \phi^+(x) \approx (1 - i\lambda)\phi^+(x)$. Setzt man diese Transformation in \mathcal{L} ein, so sieht man leicht ein, dass sich \mathcal{L} nicht ändert. Die zugehörige Variation von ϕ ist natürlich $\delta\phi(x) = i\lambda\phi(x)$ und $\delta\phi^+(x) = -i\lambda\phi^+(x)$. Es sei bemerkt, dass Eichtransformationen erster Art nicht von den Koordinaten abhängen, so dass die totale Variation $\hat{\delta}\phi(x) = \delta\phi(x) + \partial_\mu \phi(x)\delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta^2)$ der Felder einfach gegeben ist als $\hat{\delta}\phi(x) = \delta\phi(x)$ und $\hat{\delta}\phi^+(x) = \delta\phi^+(x)$.

Wie lautet nun die zu dieser Symmetrie der Lagrange-Dichte gehörende Erhaltungsgröße? Diese finden wir mit dem Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^+)} \partial^\nu \phi^+ - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} ,$$

der die Antwort des Systems auf allgemeine Transformationen der generalisierten Koordinaten (hier der Felder) darstellt. Dieser Tensor ist erhalten, d.h. er erfüllt die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, was besagt, dass die Lagrange-Dichte invariant unter einer Reparametrisierung der generalisierten Koordinaten ist. Erfüllt nun ein beliebiger Vier-Vektor $g^\mu(\phi(x), \partial_\nu \phi(x), \dots)$ eine Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu g^\mu = 0$, so folgt unter der Annahme, dass alle Größen, von denen g^μ direkt abhängt (hier wieder die Felder und ggfls. ihre Ableitungen), genügend schnell für große Argumente abfallen, dass

$$Q^0(t) = \int d^3x g^0(\phi(\mathbf{x}, t), \partial_\nu \phi(\mathbf{x}, t), \dots)$$

eine Erhaltungsgröße ist. Unsere Annahme stellt sicher, dass keine Randterme bei der Umformung des Volumenintegrals über die Divergenz der Größe in ein Oberflächenintegral auftreten. Benutzt wird hier das allgemeine Stoke's

Theorem, $\int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} g^{\mu} = 0 = \int_{\partial\Omega} d\sigma_{\mu} g^{\mu}$, wobei $d\sigma_{\mu}$ ein Flächenelement bezeichnet, das senkrecht auf der Tangentialebene an die Oberfläche steht und nach außen weist.

Wir finden nun allgemein Erhaltungsgrößen einer Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi, \phi^+, \partial_{\nu}\phi, \partial_{\nu}\phi^+, \dots)$ mit Hilfe des Noether-Theorems. Dies besagt in unserer Notation, dass für eine totale Variation $\hat{\delta}\phi, \hat{\delta}\phi^+$, die die Lagrange-Dichte invariant läßt, die zugehörige Erhaltungsgröße gegeben ist als

$$g^{\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \hat{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^+)} \hat{\delta}\phi^+ - T^{\mu\nu} \delta x_{\nu}.$$

Für unsere oben gegebene Eichinvarianz erster Art folgt damit

$$g^{\mu} \propto \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} (i\lambda\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^+)} (-i\lambda\phi^+) \propto i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^+)} \phi^+ \right).$$

Die Nullkomponente ist dann nichts anderes als der uns wohlbekannte Ausdruck $g^0 = i(\pi\phi - \pi^+\phi^+)$ der Ladungsdichte, und somit ist die Ladung $Q = -iq \int d^3x (\pi\phi - \pi^+\phi^+)$ erhalten.

Kanonische Quantisierung. Da $\pi = \dot{\phi}^+$ und $\pi^+ = \dot{\phi}$ ist, lauten die kanonischen Vertauschungsregeln entsprechend $[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}^+(\mathbf{x}', t)] = [\phi^+(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, und alle anderen Kommutatoren mit $t' = t$ verschwinden (sogenannte *equal-time commutators*). Die Modenentwicklung der Felder ϕ und ϕ^+ zerlegt sich wie üblich in einen Anteil positiver Frequenzen und einen Anteil negativer Frequenzen. Für den Fall endlichen Volumens ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2Vk^0}} \left(a_{\mathbf{k}}^{(+)} e^{-ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}}^{(-)+} e^{ik \cdot x} \right), \\ \phi^+(x) &= \phi^{(+)+}(x) + \phi^{(-)+}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2Vk^0}} \left(a_{\mathbf{k}}^{(-)} e^{-ik \cdot x} + a_{\mathbf{k}}^{(+)+} e^{ik \cdot x} \right). \end{aligned}$$

Die Vertauschungsrelationen für die zwei Sorten von Erzeuger- und Vernichtoperatoren sind $[a_{\mathbf{k}}^{(+)}, a_{\mathbf{k}'}^{(+)+}] = [a_{\mathbf{k}}^{(-)}, a_{\mathbf{k}'}^{(-)+}] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$, wobei wieder alle anderen Kommutatoren verschwinden. Entsprechend haben wir zwei Sätze von Besetzungszahloperatoren, $N_{\mathbf{k}}^{(+)} = a_{\mathbf{k}}^{(+)+} a_{\mathbf{k}}^{(+)}$ und $N_{\mathbf{k}}^{(-)} = a_{\mathbf{k}}^{(-)+} a_{\mathbf{k}}^{(-)}$. Das Vakuum ist der eindeutige, normierte Zustand $|0\rangle$ mit der Eigenschaft $a_{\mathbf{k}}^{(+)}|0\rangle = a_{\mathbf{k}}^{(-)}|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}$. Diese Aussage ist natürlich äquivalent zu der Aussage, dass die Wirkung des positiven Frequenzanteils der Feldoperatoren das Vakuum annihiliert, d.h. $\phi^{(+)}(x)|0\rangle = (\phi^+)^{(+)}(x)|0\rangle = 0 \quad \forall x$. Ausgedrückt in den Moden ergibt sich für den Vierer-Impuls

$$P^{\mu} = \sum_{\mathbf{k}} k^{\mu} \left(N_{\mathbf{k}}^{(+)} + N_{\mathbf{k}}^{(-)} \right).$$

Für die oben eingeführte Ladung hingegen ergibt sich

$$Q = q \sum_{\mathbf{k}} \left(N_{\mathbf{k}}^{(+)} - N_{\mathbf{k}}^{(-)} \right),$$

so dass also Moden zu positiven Frequenzen positiv zur Ladung beitragen, und Moden zu negativen Frequenzen entsprechend negativ. Der Vollständigkeit halber sei noch der zugehörige erhaltene Strom erwähnt, $j^{\mu}(x) = -iq : ((\partial^{\mu}\phi^+)\phi - (\partial^{\mu}\phi)\phi^+) :$, für den, wie bei der Betrachtung der Klein-Gordon-Gleichung als relativistische Ein-Teilchen-Gleichung gehabt, $\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$ gilt.

DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD

In der Vorlesung haben wir ausschließlich Teilchen betrachtet, die eine nicht verschwindende Ruhemasse besitzen. Im Handout VIII haben wir gesehen, dass masselose Teilchen einige Komplikationen mit sich bringen. Der zusätzliche Freiheitsgrad, der bei ihnen auftrat, stellt eine Eichfreiheit dar, die lokale Eichtransformationen gestattet. Leider führt dies bei der Quantisierung solcher Felder (für Spin $s \geq 1$) zu einem schwierigen Problem, dessen genaue Analyse einer Vorlesung in Quantenfeldtheorie vorbehalten bleiben muss. Einfach gesagt lassen sich kanonische Quantisierung und die Wahl einer Eichung, z.B. der Coulomb-Eichung des Vektorpotentials des elektromagnetischen Feldes, nicht in Einklang bringen. Die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A}$ wird gerne in der klassischen

Elektrodynamik verwendet. Die Bewegungsgleichung lautet $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = j^\mu$. Ist kein Strom vorhanden, $j^\mu = 0$, so lautet die freie Lösung

$$A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=\pm} \frac{1}{\sqrt{2V|\mathbf{k}|}} \left(\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + (\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu)^* a_{\mathbf{k},\lambda}^+ e^{ik \cdot x} \right),$$

wobei die Bedingungen $\mathbf{k} \cdot \epsilon_{\mathbf{k},\lambda} = 0$, $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^0 = 0$ und $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \epsilon_{\mathbf{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}$ erfüllt sein müssen. Das Auftreten der Polarisationsrichtungen ϵ sowie des Helizitätsfreiheitsgrades λ ist eine Konsequenz der Darstellungstheorie der Lorentzgruppe im Falle masseloser Teilchen. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass der Versuch der kanonischen Quantisierung, $[A^k(\mathbf{x}, t), \dot{A}^l(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ im Widerspruch zur Coulomb-Eichung $\partial_k A^k$ steht, sowie zu der Maxwell-Gleichung $\partial_k E^k = 0$, da bekanntlich $\dot{A}^k = E^k$ ist.

Lagrange-Dichte. Die Maxwell-Gleichungen für das elektromagnetische Feld, gegeben durch den Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$, lauten einfach $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$ und $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0$. Die inhomogene Maxwell-Gleichung führt zur Bewegungsgleichung für das Vektorpotential A^μ , nämlich der aus Theorie I hoffentlich noch bekannten d'Alembert-Gleichung $\partial^\nu \partial_\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = j^\mu$. Bekanntermassen ist das Vierer-Potential als Lösung dieser Gleichung nicht eindeutig bestimmt, sondern nur bis auf Eichungen $A^\mu \mapsto A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \lambda$ für eine beliebige skalare Funktion $\lambda(x)$.

Eine Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld ist beispielsweise gegeben durch

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung bezüglich A^μ liefert genau die inhomogene Maxwell-Gleichung. Interessanterweise ist die zweite Maxwell-Gleichung automatisch erfüllt, wenn man $F^{\mu\nu}$ wie oben gegeben durch das Vektorpotential ausdrückt. Das kanonisch konjugierte Feld zu A^μ ist $\Pi^\mu = -F^{\mu 0}$. Wir sehen hier gleich wieder ein Problem auftreten, denn der zu A^0 konjugierte Impuls ist $\Pi^0 = F^{00} = 0$, während die räumlichen Komponenten $\Pi^k = -F^{k0} = E^k$ sind. Das Verschwinden der zeitlichen Komponente ist ein erster Hinweis, dass die kanonische Quantisierung des Feldes A^μ so nicht funktionieren kann, da wir sie offensichtlich nicht für die Null-Komponente anwenden können.

Die Lagrange-Dichte selbst ist nicht eindeutig. So führt z.B. die alternative Wahl

$$\mathcal{L}_L = -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) - j_\mu A^\mu$$

auf die Wellengleichung in Lorentz-Eichung. Die Bewegungsgleichung ist nämlich $\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = j^\mu$, und der kanonisch konjugierte Impuls ergibt sich mit dieser Wahl zu $\Pi_L^\mu = -\partial^0 A^\mu = -\dot{A}^\mu$. Diese Bewegungsgleichung ist nur dann mit der oben gefundenen identisch, wenn wir für das Potential die Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ wählen. Die beiden Lagrange-Dichten unterscheiden sich nämlich genau durch einen Term, der die Eichung festlegt, $-\frac{1}{2} (\partial_\lambda A^\lambda)^2$, denn $\mathcal{L}_L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\lambda A^\lambda)^2 - j_\mu A^\mu$. Dies nennt man auch Eichfixierung.

Quantisierung. Wir beginnen zunächst mit dem freien elektromagnetischen Feld, also mit dem Fall, dass keine Ströme vorliegen, $j^\mu = 0$. Die Lagrange-Dichte nimmt dann die wohlbekannte Form $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$ an, was uns via der Legendre-Transformation zu der Hamilton-Dichte $\mathcal{H} = \Pi^k \dot{A}_k - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ bringt.

Die Quantisierung wird mit bosonischen Vernichtern und Erzeugern gemacht, da wir entweder mit dem Spin-Statistik-Theorem wissen, dass Teilchen mit Spin eins Bosonen sind, oder es aus der strikten Gültigkeit des Planckschen Strahlungsgesetzes folgern können. Da die drei Vektoren \mathbf{k} , $\epsilon_{\mathbf{k},+}$ und $\epsilon_{\mathbf{k},-}$ alle senkrecht aufeinander stehen, ergibt sich für den Hamilton-Operator

$$H_\gamma = \sum_{\mathbf{k},\lambda} |\mathbf{k}| : a_{\mathbf{k},\lambda}^+ a_{\mathbf{k},\lambda} : ,$$

wobei wir bereits normalgeordnet haben. Die Kommutatoren sind $[a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}^+] = \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$, alle anderen Kommutatoren verschwinden. Ohne genauere Rechnung geben wir das Ergebnis für den Kommutator des Feldes mit seinem kanonisch konjugiertem an:

$$[A^j(\mathbf{x}, t), \dot{A}^l(\mathbf{x}', t)] = -\frac{i}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left(\delta^{jl} - \frac{k^j k^l}{\mathbf{k}^2} \right) \left(e^{ik(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} + e^{-ik(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right) = -i \left(\delta^{jl} - \frac{\partial^j \partial^l}{\nabla^2} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Der letzte Ausdruck ist symbolisch zu verstehen, und involviert den uns noch nicht bekannten Propagator des Photons. Wir sehen aber bereits hier, dass das Feld A^μ keine kanonischen Vertauschungsregeln erfüllt, obwohl wir

für die Erzeuger und Vernichter der Photonen-Quanten den üblichen Ansatz gemacht haben. Die anderen Kommutatoren verschwinden wieder alle, also $[A^j(\mathbf{x}, t), A^l(\mathbf{x}', t)] = [\dot{A}^j(\mathbf{x}, t), \dot{A}^l(\mathbf{x}', t)] = 0$. Diese Quantisierung hängt leider von der Wahl der Eichung ab! Die hier angegebenen Resultate stimmen für Coulomb-Eichung. Glücklicherweise sind aber die Kommutatoren für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} unabhängig von der Eichung. Es ergeben sich mit $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$ und $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ die Regeln

$$\begin{aligned} [E^j(\mathbf{x}, t), E^l(\mathbf{x}', t)] &= [B^j(\mathbf{x}, t), B^l(\mathbf{x}', t)] = 0, \\ [E^j(\mathbf{x}, t), B^l(\mathbf{x}', t)] &= i\varepsilon^{jlm} \partial_m \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Diese Kommutatoren sind auch lokal, während im Kommutator des Vektorpotentials der nicht-lokale Term ∇^{-2} auftritt. Wir erhalten in Normalordnung für den Hamilton- und den Impulsoperator

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3x :(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2): = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} k^0 a_{\mathbf{k}, \lambda}^+ a_{\mathbf{k}, \lambda}, \\ \mathbf{P} &= \int d^3x :\mathbf{E} \times \mathbf{B}: = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \mathbf{k} a_{\mathbf{k}, \lambda}^+ a_{\mathbf{k}, \lambda}. \end{aligned}$$

Propagator. Wir definieren den Propagator gleich als Feynmann-Propagator, d.h. als Vakuumerwartungswert (bzw. Korrelationsfunktion) des zeitgeordneten Produkts:

$$iD_F^{\mu\nu}(x - x') = \langle 0 | \mathcal{T}(A^\mu(x) A^\nu(x')) | 0 \rangle.$$

Der Propagator muss lorentz-kovariant sein (er muss ein Tensor zweiter Stufe bezüglich der Lorentz-Gruppe sein) und darf Lokalität nicht verletzen. Letztere Eigenschaft muss auch für beliebig kleine Abstände gelten, was man auch *Mikro-Kausalität* nennt. Die physikalische Aussage ist die, dass durch den Propagator keine Informationen mit Überlichtgeschwindigkeit transportiert werden, d.h. Felder, deren Abstand räumlich voneinander sind, dürfen sich nicht beeinflussen. Die allgemeinen Symmetrien legen zusammen mit der Mikro-Kausalität die Abhängigkeit des Propagators von seinem Argument ab: $D_F^{\mu\nu}(x)$ kann in Wirklichkeit nur von $(x)^2$ abhängen, also einer strikt lorentz-invarianten Größe. Die allgemeinste Form, die der Propagator annehmen kann, ist

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} D^{(0)}(x^2) - \partial^\mu \partial^\nu D^{(l)}(x^2), \quad \text{bzw.} \quad \tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \eta^{\mu\nu} \tilde{D}^{(0)}(k^2) - k^\mu k^\nu \tilde{D}^{(l)}(k^2), \quad (*)$$

wobei die zweite Gleichung für den Impulsraum gilt. In konkreten Rechnungen kann der Photonen-Propagator nur in der Kombination $j_\mu D_F^{\mu\nu} j_\nu$ auftreten, wobei die Stromdichten j z.B. Elektron-Positron-Stromdichten sind. Physikalisch sagt dies, dass Photonen eine Emissionsquelle und eine Absorptionssenke haben müssen, also nicht einfach so aus dem nichts kommen können. Aufgrund der Stromerhaltung $\partial^\mu j_\mu = 0$, im Impulsraum also $k^\mu \tilde{j}_\mu = 0$, ändern sich physikalische Ergebnisse nicht, wenn der Propagator $\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k)$ durch

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) \mapsto \tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) + \chi^\mu(k) k^\nu + \chi^\nu(k) k^\mu \quad (**)$$

ersetzt wird, wobei die $\chi^\mu(k)$ beliebige Funktionen von k sind. Diese Eigenschaft ist sehr wichtig, da nämlich die Fixierung auf eine bestimmte Eichung die schöne lorentz-kovariante Form (*) des Propagators $D_F^{\mu\nu}(x)$ zerstört. Stattdessen bekommt man einen Ausdruck der Form (**), die physikalischen Ergebnisse bleiben aber natürlich unverändert. Die Umeichung via (**) kann man nach Geschmack und Bequemlichkeit durchführen, und wir werden im folgenden wieder alles auf die Coulomb-Eichung beziehen. Da der Propagator $\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k)$ der inhomogenen d'Alambert-Gleichung für eine vierdimensionale Punktquelle $\delta^{(4)}(x)$ genügen muss, muss $\tilde{D}^{(0)}(k^2) \propto \frac{1}{k^2}$ sein. Man kann die meisten Relationen von den Klein-Gordon Propagatoren übernehmen, wenn man einfach die Polarisationsvektoren für das elektromagnetische Feld hinzunimmt. Mit der zusätzlichen Definition $iD_+^{\mu\nu}(x - x') = \langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(x') | 0 \rangle$ findet man

$$\begin{aligned} D_\pm^{\mu\nu}(x) &= \mp \frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \sum_\lambda \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\nu e^{\mp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \\ D_F^{\mu\nu}(x) &= \theta(t - t') D_+^{\mu\nu}(x) - \theta(t' - t) D_-^{\mu\nu}(x) \\ &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \sum_\lambda \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\nu \left(\theta(x^0 - x'^0) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} + \theta(x'^0 - x^0) e^{+i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Lambda^{\mu\nu}(k) \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{k^2 + i\varepsilon}, \\ \Lambda^{\mu\nu}(k) &= \sum_\lambda \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\nu. \end{aligned}$$

Der Polarisations“tensor” hat die Komponenten $\Lambda^{00} = \Lambda^{j0} = \Lambda^{0j} = 0$ und $\Lambda^{jl} = \delta^{jl} - \frac{k^j k^l}{(k)^2}$. Dies ist allerdings kein lorentz-kovarianter Tensor, wie wir gleich sehen werden.

Es gibt mit diesem Propagator ein kleines Problem. In Coulomb-Eichung besitzt die zeitliche Komponente A^0 des Vektorpotentials keinen konjugierten Impuls. Der in dieser Eichung erhaltene Propagator ist auch so nicht lorentz-kovariant. Man kann den Polarisationsensor mit Hilfe des Vektors $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ umschreiben in die Form

$$\Lambda^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu - (k \cdot n)(n^\mu k^\nu + k^\mu n^\nu)}{(k \cdot n)^2 - (k)^2} - \frac{(k)^2 n^\mu n^\nu}{(k \cdot n)^2 - (k)^2}.$$

Der mittlere Beitrag ist genau von der Form in (**), die also ohne Einfluss auf die physikalisch messbaren Größen ist und daher weggelassen werden kann. Der erste Term ist lorentz-kovariant, der dritte Term führt hingegen im Feynmann-Propagator zu einem Beitrag

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-x')} \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \frac{k^2}{\mathbf{k}^2} n^\mu n^\nu = i n^\mu n^\nu \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{\mathbf{k}^2} \delta(x^0 - x'^0) = i \delta(x^0 - x'^0) \frac{n^\mu n^\nu}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Es tritt also eine instantane Coulomb-Wechselwirkung auf! Dies ist natürlich nicht lorentz-kovariant. Allerdings stellt sich heraus, dass dieser Term sich in konkreten Rechnungen in der Störungstheorie genau mit der durch die Coulomb-Eichung bedingten Coulomb-Wechselwirkung weghebt.

Transversale Photonen. Um dies etwas genauer zu sehen, betrachten wir noch einmal die Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - j_\mu A^\mu$. Wir zerlegen nun das elektrische Feld in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{trans}} + \mathbf{E}^{\text{long}}$, wobei $\mathbf{E}^{\text{trans}} = -\dot{\mathbf{A}}$ und $\mathbf{E}^{\text{long}} = -\nabla A^0$ ist. Einsetzen und Ausmultiplizieren führt zu einem gemischten Term, der aber verschwindet, $\int d^3 x \mathbf{E}^{\text{trans}} \cdot \mathbf{E}^{\text{long}} = \int d^3 x \dot{\mathbf{A}} \cdot \nabla A^0 = 0$, wie man durch partielle Integration und unter verwenden der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ schnell sieht. Die Lagrange-Dichte ist damit äquivalent zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\dot{\mathbf{A}}^{\text{trans}})^2 + (\mathbf{E}^{\text{long}})^2 - (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right) - j_\mu A^\mu.$$

Der konjugierte Impuls des elektromagnetischen Potentials \mathbf{A} ist damit $\Pi^{\text{trans}} = -\dot{\mathbf{A}}$, und die Hamilton-Dichte demnach

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\gamma + \mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} (\Pi^{\text{trans}})^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^{\text{long}})^2 + j_\mu A^\mu.$$

Die zwei ersten Terme sind genau die Hamilton-Dichte \mathcal{H}_γ des Strahlungsfeldes, wie wir sie zuvor erhalten hatten, während der restliche Anteil $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{E}^{\text{long}})^2 + j_\mu A^\mu$ ein Wechselwirkungsterm ist. Es ist nun sinnvoll, von dieser Wechselwirkung einen Anteil abzuspalten, nämlich den der reinen Coulomb-Wechselwirkung:

$$\mathcal{H}_{\text{Coul}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{E}^{\text{long}})^2 + j_0 A^0.$$

Berechnet man nämlich von dieser Dichte den Hamilton-Operator durch räumliche Integration, so findet man

$$\begin{aligned} H_{\text{Coul}} &= \int d^3 x \mathcal{H}_{\text{Coul}} = \int d^3 x \left(-\frac{1}{2} (\nabla A^0)^2 + j_0 A^0 \right) = \int d^3 x \left(\frac{1}{2} A^0 \nabla^2 A^0 + j_0 A^0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 x j_0 A^0 = \frac{1}{2} \int d^3 x \int d^3 x' \frac{j_0(\mathbf{x}, t) j_0(\mathbf{x}', t)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \end{aligned}$$

also genau die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Ladungsdichten $j_0(\mathbf{x}, t)$. Also nimmt die gesamte Wechselwirkung die Form

$$H_{\text{int}} = H_{\text{Coul}} - \int d^3 x \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

an. Der Propagator der $D_F^{\mu\nu}(x)$ transversalen Photonen ist zusammen mit der Coulomb-Wechselwirkung äquivalent zu dem folgenden *kovarianten* Propagator:

$$\mathcal{D}_F^{\mu\nu}(x) = -\eta^{\mu\nu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i\varepsilon}. \quad (***)$$

Was ist genau passiert? Wir haben die Coulomb-Eichung gewählt, in der wir als dynamische Freiheitsgrade zu jedem Wellenzahlvektor zwei transversale Photonen erhalten (über die Polarisationsrichtungen), und zusätzlich eine instantane Coulomb-Wechselwirkung. Diese beiden für sich jeweils allein genommen nicht kovarianten Anteile lassen sich zu einem kovarianten Propagator (***) zusammenfassen. Hätten wir statt dessen die Lorentz-Eichung

verwendet, hätten wir volle vier Photonen erhalten, die uns auch gleich den kovarianten Propagator ergeben hätten. Allerdings müssen wir in der Lorentz-Eichung in Kauf nehmen, dass wir ein longitudinales und ein skalare Photon zusätzlich zu den beiden transversalen Photonen erhalten. Diese beiden Photonen sind insofern unphysikalisch, da sie keinen Beitrag zu physikalisch beobachtbaren Observablen liefern, außer der Coulomb-Wechselwirkung, die genau durch diese Quanten vermittelt wird.

Wir sehen hier, dass die korrekte Beschreibung masseloser Quanten aufgrund der speziellen Darstellung der Lorentz-Gruppe in diesem Fall künstliche zusätzliche Freiheitsgrade mit sich bringt, die man entweder durch Eichung eliminieren muss (was im allgemeinen die Kovarianz zerstört) oder für die man sicherstellen muss, dass sie keine physikalischen Konsequenzen haben. Eine elegante Möglichkeit letzteres zu tun wurde von Gupta und Bleuler entwickelt, und sollte in jeder guten Vorlesung zur Quantenfeldtheorie behandelt werden. Uns fehlt hierfür leider der notwendige Platz ; -)

Kovariante Quantisierung. Wir wollen aber wenigstens kurz die kovariante Quantisierung (also die in Lorentz-Eichung) skizzieren. Die Lagrange-Dichte ist nun $\mathcal{L}_L = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu u A^\mu) - j_\mu A^\mu$ mit den kanonischen Impulsen $\Pi_L^\mu = -\dot{A}^\mu$. Die daraus resultierende Feldgleichung ist, wie schon gesagt, $\partial_n u \partial^\nu A^\mu(x) = j^\mu(x)$, die nur dann äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen ist, wenn das Viererpotential die Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ erfüllt. Die allgemeinste Lösung der freien Gleichung ($j^\mu = 0$) erhält man wie üblich durch Superposition, wobei wir wieder positive und negative Frequenzanteile trennen:

$$A^\mu(x) = A^{\mu(+)}(x) + A^{\mu(-)}(x) = \sum_{\mathbf{k}, r} (2V|\mathbf{k}|)^{-1/2} (\epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}) .$$

Die vier Polarisationsvektoren erfüllen die üblichen Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen $\epsilon_r(\mathbf{k}) \cdot \epsilon_s(\mathbf{k}) = \epsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \epsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = \eta_{rs}$, $r, s = 0, 1, 2, 3$, und $\sum_r \eta^{rr} \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = -\eta^{\mu\nu}$. Es ist oft sinnvoll, die Polarisationsvektoren wie folgt zu wählen (die unterschiedliche Notation soll helfen, zwischen der Quantisierung in Coulomb-Eichung und der in Lorentz-Eichung zu unterscheiden):

$$\begin{aligned} \epsilon_0^\mu(\mathbf{k}) &= n^\mu = (1, 0, 0, 0) , \\ \epsilon_1^\mu(\mathbf{k}) &= (0, \epsilon_{\mathbf{k},+}) , \\ \epsilon_2^\mu(\mathbf{k}) &= (0, \epsilon_{\mathbf{k},-}) , \\ \epsilon_3^\mu(\mathbf{k}) &= (0, \hat{\mathbf{k}}) . \end{aligned}$$

Dann stehen $\epsilon_{\mathbf{k},\pm}$ wie gehabt senkrecht aufeinander und auch auf \mathbf{k} . Man bezeichnet naheliegender Weise $\epsilon_3^\mu(\mathbf{k})$ als longitudinale Polarisation, $\epsilon_r^\mu(\mathbf{k})$ mit $r = 1, 2$ nach wie vor als transversale Polarisationen, und $\epsilon_0^\mu(\mathbf{k})$ als skalare oder zeitartige Polarisation. Alternativ kann auch $\epsilon_3^\mu(\mathbf{k}) = (k^\mu - (k \cdot n)n^\mu) / \sqrt{(k \cdot n)^2 - (k^2)^2}$ für die longitudinale Polarisation geschrieben werden. Die kovarianten gleichzeitigen Vertauschungsregeln ergeben sich damit zu

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = [\dot{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0 , \quad [A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] = -i\eta^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') .$$

Da diese Kommutatoren bis auf einen trivialen Vorfaktor $\eta^{\mu\nu}$ identisch zu denen des Klein-Gordon-Feldes sind, kann man alle Resultate von dort direkt übernehmen. Der einzige unterschied ist das umgekehrte Vorzeichen bei der Null-Komponente. Es ergibt sich daher sofort

$$\begin{aligned} [A^\mu(x), A^\nu(x')] &= i\mathcal{D}^{\mu\nu}(x - x') = -\eta^{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \delta(k^2) \epsilon(k^0) e^{-ik \cdot x} , \\ \langle 0 | T(A^\mu(x), A^\nu(x')) | 0 \rangle &= i\mathcal{D}_F^{\mu\nu}(x - x') = -i\eta^{\mu\nu} \int \frac{d^4 k e^{-ik \cdot (x - x')}}{k^2 + i\epsilon} . \end{aligned}$$

Schließlich folgen aus der Umkehrung der Superposition die Kommutatoren der Erzeuger und Vernichter, nämlich

$$\begin{aligned} [a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] &= -\eta_{rs} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}} , \\ [a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] &= [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 . \end{aligned}$$

Gupta-Bleuler. Sieht man sich die obigen Kommutatoren an, so sind offensichtlich die räumlichen Komponenten $r, s = 1, 2, 3$ ganz analog zum Klein-Gordon-Feld gegeben. Beim skalaren Photon ($r = 0$) scheint hingegen die Rolle von Erzeuger und Vernichter genau vertauscht zu sein.

Den Vakuum-Zustand $|0\rangle$ definieren wir wie üblich als den Zustand, der von allen Vernichtern annihiliert wird, d.h. $a_r(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \forall \mathbf{k}$ und $r = 0, 1, 2, 3$. Dies ist, wie beim Klein-Gordon-Feld, äquivalent zu der Aussage,

dass der positive Frequenzanteil des Feldes das Vakuum annihiliert, $A^{\mu(+)}(x)|0\rangle = 0 \forall x$. Ein Ein-Photonen-Zustand ist dann allgemein gegeben als $|\mathbf{p}, s\rangle = a_s^+(\mathbf{p})|0\rangle$. Betrachten wir kurz den Hamilton-Operator: $H = \int d^3x : \left(\Pi_L^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - \mathcal{L}_L(x) \right) :$, der mit Einsetzen der Modenentwicklung die Form

$$H = - \sum_{\mathbf{k}, r} |\mathbf{k}| \eta^{rr} a_r^+(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})$$

annimmt. Die Energie ist nun trotz des unterschiedlichen Vorzeichens der Null-Komponente, $-\eta^{00} = -1$, positiv definit, weil dieses Vorzeichen durch das entsprechende Vorzeichen in der Vertauschungsregel gerade wieder aufgehoben wird. In der Tat gilt

$$H|\mathbf{p}, s\rangle = - \sum_{\mathbf{k}, r} |\mathbf{k}| \eta^{rr} a_r^+(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) a_s^+(\mathbf{p})|0\rangle = |\mathbf{p}| a_s^+(\mathbf{p})|0\rangle \geq 0, \quad s = 0, 1, 2, 3.$$

Daher definiert man auch den Besetzungszahloperator entsprechend als $N_{r, \mathbf{k}} = -\eta_{rr} a_r^+(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})$, wobei keine Summe über r impliziert ist.

Zwar ist die Energie positiv definit, aber man hat nun ein anderes Problem. Die Norm der Zustände ist nämlich nun

$$\langle \mathbf{p}, s | \mathbf{p}, s \rangle = \langle 0 | a_s(\mathbf{p}) a_s^+(\mathbf{p}) | 0 \rangle = -\eta_{ss} \langle 0 | 0 \rangle = -\eta_{ss}.$$

Die Norm des skalaren Photons ist also negativ! Genauer kann man zeigen, dass die Norm jedes Zustands mit einer ungeraden Anzahl skalarer Photonen negativ ist. Solche Zustände negativer Norm sind unphysikalisch. Gerettet werden wir dadurch, dass in der Tat die Lorentz-Eichung den Effekt der skalaren Photonen aus allen physikalischen Größen eliminiert. Die skalaren Photonen ergeben nämlich zusammen mit den longitudinalen lediglich die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den geladenen Teilchen, die als Quellen (und Senken) des elektromagnetischen Feldes auftreten.

Wir schon erwähnt, müssen wir die Lorentz-Bedingung noch von Hand erfüllen, damit die so quantisierte Theorie überhaupt den Maxwell-Gleichungen genügt. Doch hier tritt gleich ein weiteres Problem auf. In der quantisierten Theorie ist es gar nicht möglich, die Lorentz-Bedingung $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$ als Operatoridentität für den Feldoperator $A^\mu(x)$ zu fordern. Täten wir es nämlich, so würde mit dem Kommutator $[A^\mu(x), A^\nu(x')]$ folgen, dass

$$[\partial_\mu A^\mu(x), A^\nu(x')] = i \partial_\mu \mathcal{D}^{\mu\nu}(x - x')$$

verschwinden müsste. Das steht aber im Widerspruch zu unserem obigen Resultat für $\mathcal{D}_F^{\mu\nu}(x - x')$.

Der Ausweg von Gupta und Bleuler ist nun, die Lorentz-Bedingung nicht als Operator-Identität zu fordern, sondern lediglich für Erwartungswerte. Man eliminiert im Hilbertraum alle die Zustände, die die Lorentz-Bedingung nicht erfüllen. Die *physikalischen Zustände* $|\Psi\rangle$ sind gegeben durch die Bedingung

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) |\Psi\rangle = 0. \quad (\text{GP})$$

Man beachte, dass hier lediglich der positive Frequenzanteil des Feldes involviert ist. Selbst auf Zuständen kann die volle Lorentz-Eichung (für das ganze Feld A^μ) nicht ohne Widersprüche gefordert werden. Aus dieser Bedingung folgt offensichtlich auch $\langle \Psi | \partial_\mu A^{\mu(-)}(x) = 0$ und damit $\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \Psi \rangle = 0$. Die obige Bedingung ist gerade hinreichend, um die Lorentz-Eichung für Erwartungswerte zu erzwingen. Dies garantiert, dass die Maxwell-Gleichungen im klassischen Grenzfall erfüllt sind. Lorentz-Eichung ist also nur in Erwartungswerten erfüllt, nicht für die Operatoren selbst. Diese sogenannte Nebenbedingung (GP) hat nur auf die skalaren und longitudinalen Photonen eine Auswirkung, da die Polarisationsvektoren der transversalen Photonen auf \mathbf{k} senkrecht stehen. Setzt man die Modenentwicklung ein, so lautet die Nebenbedingung

$$(a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})) |\Psi\rangle = 0$$

für alle \mathbf{k} . Dies bedeutet eine Einschränkung der Freiheitsgrade. Die Anregungen der skalaren und der longitudinalen Photonen sind bei physikalischen Zuständen nicht unabhängig von einander. Falls $|\Psi\rangle$ diese Bedingungen erfüllt, so sieht man, dass der Anteil des Erwartungswertes des Hamilton-Operators für skalare und longitudinale Photonen gerade verschwindet:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | a_3^+(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_0^+(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) | \Psi \rangle &= \langle \Psi | a_3^+(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_0^+(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) - a_0^+(\mathbf{k}) (a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})) | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | (a_3^+(\mathbf{k}) - a_0^+(\mathbf{k})) a_3(\mathbf{k}) | \Psi \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also gilt mit der Formel für den ganzen Hamilton-Operator in kovarianter Quantisierung, dass zum Erwartungswert

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1,2} |\mathbf{k}| a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \Psi \rangle$$

nur die beiden transversalen Photonen beitragen. Dies gilt auch für andere physikalische Observablen wie \mathbf{P} und \mathbf{J} . Es treten somit bei freien Feldern in den tatsächlich beobachtbaren Größen nur die transversalen Photonen auf, ganz so wie es bei der Coulomb-Eichung von vorneherein der Fall ist. Sind keine Ladungen vorhanden, so führt die Anregung von skalaren und longitudinalen Photonen, wenn die Nebenbedingung (GP) beachtet wird, zu keinen beobachtbaren Konsequenzen. Genauer kann man zeigen, dass die Anregung derartiger Photonen nur zu einer Umeichung des Feldes führt, die nach wie vor der Lorentz-Eichung genügt. Als Vakuumzustand verwendet kann man daher weiter die einfachste Wahl verwenden, nämlich den Zustand, in dem keine Photonenzustände besetzt sind.

Sind Ladungen vorhanden, so liefern die skalaren und longitudinalen Photonen gerade die Coulomb-Wechselwirkung zwischen diesen Ladungen. Sie treten als virtuelle Teilchen in den Zwischenzuständen auf. In der Sprache der Feynmann-Diagramme heißt dies, dass skalare und longitudinale Photonen, wenn überhaupt, nur in inneren Linien auftreten können. In den Anfangs- und Endzuständen hingegen (den äußeren Linien) können jedoch lediglich transversale Photonen auftreten.

Feynmann-Propagator. Ganz zum Schluss sei noch kurz der Feynmann-Propagator diskutiert. Mit der Identität

$$\eta^{\mu\nu} = - \sum_r \eta^{rr} \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_r^\nu(\mathbf{k})$$

kann man mit unserer speziellen Wahl der Polarisationsvektoren den Feynmann-Propagator im Impulsraum auch so schreiben:

$$\tilde{\mathcal{D}}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[\sum_{r=1,2} \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_r^\nu(\mathbf{k}) + \frac{(k^\mu - (k \cdot n)n^\mu)(k^\nu - (k \cdot n)n^\nu)}{(k \cdot n)^2 - (k)^2} - n^\mu n^\nu \right].$$

Der Propagator zerfällt demnach in drei Terme. Der erste Term stellt den Austausch von transversalen Photonen dar,

$$\tilde{\mathcal{D}}_{F,\text{trans}}^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \sum_{r=1,2} \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \epsilon_r^\nu(\mathbf{k}).$$

Der zweite und dritte Term können noch etwas umsortiert werden, so dass sie die folgende Form annehmen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_{F,\text{Coul}}^{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[\frac{(k \cdot n)^2 n^\mu n^\nu}{(k \cdot n)^2 - (k)^2} n^\mu n^\nu \right] = \frac{n^\mu n^\nu}{\mathbf{k}^2}, \\ \tilde{\mathcal{D}}_{F,\text{red}}^{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[\frac{k^\mu k^\nu - (k \cdot n)(k^\mu n^\nu + n^\mu k^\nu)}{(k \cdot n)^2 - (k)^2} \right]. \end{aligned}$$

Der Propagator-Anteil $\tilde{\mathcal{D}}_{F,\text{trans}}^{\mu\nu}(k)$ stellt die instantane Coulomb-Wechselwirkung dar. Im Ortsraum lautet dieser Anteil

$$\mathcal{D}_{F,\text{trans}}^{\mu\nu}(x) = n^\mu n^\nu \int \frac{d^3k dk^0}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} = \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \delta(x^0).$$

Der Austausch von longitudinalen und skalaren Photonen ergibt somit gerade die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Ladungen, die ja ansonsten nicht explizit in der Theorie auftritt. Der Anteil $\tilde{\mathcal{D}}_{F,\text{red}}^{\mu\nu}(k)$ des Propagators liefert keinen physikalischen Beitrag. Solche Terme treten öfters in Propagatoren auf, und heißen aus diesem Grund redundante Terme. Dies liegt wieder daran, dass der Propagator nur zwischen Ladungsströmen auftritt,

$$\int d^4x \int d^4x' j_\mu^{(1)}(x) \mathcal{D}_F^{\mu\nu}(x-x') j_\nu^{(2)}(x') = \int d^4k \tilde{j}_\mu^{(1)}(k) \tilde{\mathcal{D}}_F^{\mu\nu}(k) \tilde{j}_\nu^{(2)}(x'),$$

die Stromdichten aber erhalten sind, $\partial_\mu j^\mu(x) = \tilde{j}^\mu(k) k^\mu = 0$. Da in $\tilde{\mathcal{D}}_{F,\text{red}}^{\mu\nu}(k)$ alle Terme proportional zu k^μ bzw. k^ν sind, trägt dieser Term aufgrund der Stromerhaltung nichts bei.