KLEINE GRUPPE UND INDUZIERTE DARSTELLUNGEN

In der Vorlesung haben wir uns ein paar Eingenschaften der Lorentz-Gruppe klar gemacht. Die Lorentzgruppe zerfällt in vier Zusammenhangskomponenten, charakterisiert durch $\det\Lambda = \pm 1$ und $\mathrm{sgn}\Lambda^0_0$, wobei Λ eine Lorentz-Transformation ist, gegeben als 4×4 Matrix. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass entweder $\Lambda^0_0 \geq +1$ oder $\Lambda^0_0 \leq -1$ sein muss. Die Zusammenhangskomponente, die auch die Einheitsmatrix, also das Eins-Element der Lorentz-Gruppe, enthält, heißt *eigentliche orthochrono* Lorentz-Gruppe. Offensichtlich ist bei ihr $\det\Lambda = 1$ und $\Lambda^0_0 \geq +1$. Die anderen Zusammenhangskomponenten erhält man durch Verketten einer eigentlichen orhtochronen Lorentz-Transformation mit $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ oder $\mathcal{PT}$, also der Raum-Inversion $\mathcal{P} : (ct,\mathbf{x}) \mapsto (ct,-\mathbf{x})$, der Zeitumkehr $\mathcal{T} : (ct,\mathbf{x}) \mapsto (-ct,\mathbf{x})$, bzw. der Kombiantion von beiden.

Für eine Analyse der Darstellungen $U(\Lambda)$ der Lorentz-Gruppe auf einem Hilbertraum von Ein-Teilchen-Zuständen $|\psi_{p,\alpha}\rangle$, charakterisiert durch einen Vierer-Impuls $p \equiv p^\mu$ und weitere diskrete Quantenzahlen α, ist folgende Beobachtung sehr nützlich: Die einzigen skalaren Invarianten des Vierer-Impulses p^μ sind das Skalarprodukt $(p)^2 = p_\mu p^\mu$ und, für $(p)^2 \geq 0$, das Vorzeichen $\mathrm{sgn} p^0$. Da diese beiden Größen Invarianten sind, ändern sie sich nicht unter der Wirkung einer beliebigen Lorentz-Transformation. Ist ein Wert von $(p)^2 = m^2c^4$ fest vorgegeben, so kann jeder Vierer-Impuls p^μ mit $p_\mu p^\mu = m^2c^4$ durch eine geeignete Lorentz-Transformation aus einem gewählten Referenz-Impuls k^μ mit $k_\mu k^\mu = m^2c^4$ erhalten werden,

$$p^\mu = L^\mu_\nu(p)k^\nu\,.$$

Diese spezielle Lorentz-Transformation hängt natürlich von p^μ ab. Für eine unitäre Darstellung gilt nun folgender wichtiger Sachverhalt:

$$\begin{aligned}
|\psi_{p,\alpha}\rangle &= \mathcal{N}(p)U(L(p))|\psi_{k,\alpha}\rangle\,,\\
U(\Lambda)|\psi_{p,\alpha}\rangle &= \mathcal{N}(p)U(\Lambda L(p))|\psi_{k,\alpha}\rangle\\
&= \mathcal{N}(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))|\psi_{k,\alpha}\rangle\,.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathcal{N}(p)$ eine noch offene Normierung, die wir später gleich eins gesetzt haben, so dass das Skalarprodukt die Form

$$\langle\psi_{p',\alpha'}|\psi_{p,\alpha}\rangle = \frac{p^0}{k^0}\delta_{\alpha'\alpha}\delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$$

annimmt. Die Zustände sind dann zwar nicht mehr orthonormal, aber viele andere Formeln werden dadurch wesentlich einfacher. Eine andere, häufig verwendete, Normierung ist $\mathcal{N}(p) = \sqrt{p^0}$. Der entscheidende Punkt ist jedoch, dass die Lorentz-Transformation

$$W^\mu_\nu k^\nu = (L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))^\mu_\nu k^\nu = k^\mu$$

den Referenz-Impuls unverändert läßt. Diese Transformationen W formen eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe, die sogenannte *kleine Gruppe*. Die Transformationen selbst werden auch *Wigner-Rotationen* genannt. Um also Darstellungen

$$U(\lambda)|\psi_{p,\alpha}\rangle = \sum_{\alpha'} C_{\alpha'\alpha}(\Lambda,p)|\psi_{\Lambda p,\alpha'}\rangle$$

zu studieren, reicht es völlig aus, die Darstellungen der kleinen Gruppe zu kennen,

$$U(W)|\psi_{k,\alpha}\rangle = \sum_{\alpha'}\rho_{\alpha'\alpha}(W)|\psi_{k,\alpha'}\rangle\,,$$

also die, ggfls. unendlich-dimensionalen, Matrizen $\rho_{\alpha'\alpha}$. Natürlich wählt man die Basis der Ein-Teilchen-Zustände so, dass diese Matrizen Blockdiagonalform annehmen, also in nicht mehr weiter reduzierbare Blöcke zerfallen. Diese Blöcke sind dann die irreduziblen Darstellungen der kleinen Gruppe, und damit induziert, auch der Lorentz-Gruppe. Die Situation ist ganz ähnlich zu unserer Analyse des Drehimpulses am Anfang des Semesters (siehe Handouts I und II), wo wir die irreduziblen Blöcke $\rho^{(j)}_{m'm}$ bestimmt haben.

Klassifikation der Darstellungen. Es gibt lediglich sechs Typen von Darstellungen der Lorentz-Gruppe, und nur drei davon sind in der Natur realisiert (gekennzeichnet durch einen $*$). Die Typen von Darstellungen sind charakterieisert durch den Wert von $(p)^2$ und ggfls. das Vorzeichen $\mathrm{sgn}p^0$. In der folgenden Tabelle geben wir die sechs

Möglichkeiten zusammen mit einer geschickten Wahl des Referenz-Impulses (vergleichbar der Wahl der z-Achse zur Festlegung der magnetischen Quantenzahlen) sowie die resultierende kleine Gruppe an:

	Darstellungstyp				Standard k^μ	kl. Gruppe	physikalische Bedeutung
$*$	$(p)^2$	$=$	$m^2c^4 > 0$	$p^0 > 0$	$(\ \ mc^2, 0, 0, 0)$	$\mathrm{SO}(3)$	Teilchen mit Ruhemasse $m > 0$
	$(p)^2$	$=$	$m^2c^4 > 0$	$p^0 < 0$	$(-mc^2, 0, 0, 0)$	$\mathrm{SO}(3)$	
$*$	$(p)^2$	$=$	0	$p^0 > 0$	$(\ \ \kappa, 0, 0, \kappa)$	$\mathrm{ISO}(2)$	Masseloses Teilchen
	$(p)^2$	$=$	0	$p^0 < 0$	$(-\kappa, 0, 0, \kappa)$	$\mathrm{ISO}(2)$	
	$(p)^2$	$=$	$-\mu^2 < 0$		$(0, 0, 0, \mu)$	$\mathrm{SO}(1, 2)$	
$*$	p^μ	$\equiv$	0		$(0, 0, 0, 0)$	$\mathrm{SO}(1, 3)$	Vakuum

Die Wahl des Standard-Impulses für massive Teilchen ist natürlich der für ihr Ruhesystem, d.h. das Inertialsystem, relativ zu dem sich das massive Teilchen in Ruhe befindet. Dies ist für masselose Teilchen so nicht möglich, so dass wir hier, der Einfachheit halber, die Bewegung in z-Richtung gewählt haben. Das Vakuum ist der völlig Lorentz-invariante Zustand, die kleine Gruppe ist hier gleich der ganzen eigentlichen Lorentz-Gruppe.

Die hier auftretenden Gruppen sind die eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe SO(1,3), die Lorentz-Gruppe des (1+2)-dimensionalen Raumes SO(1,2), die Drehgruppe SO(3), sowie die euklidische Gruppe ISO(2) des 2-dimensionalen Raumes, die Drehungen und Translationen umfasst. Zu bemerken ist noch, dass die auftretenden Darstellungen der kleinen Gruppe unitär sind, d.h. $\rho^+(W) = \rho^{-1}(W) = \rho(W^{-1})$. Man kann die kleine Gruppe für den ersten Fall (massive Teilchen) sofort verstehen, da SO(3) die maximale Untergruppe von SO(1,3) ist, die den Null-Raumvektor invariant läßt.

Normierung der Zustände. Unsere Ein-Teilchen-Zustände werden charakterisiert durch einen Vierer-Impuls p und weitere (diskrete) Quantenzahlen α. Wir haben allerdings noch nicht erklärt, wie wir diese Zustände normiert haben. Das Problem ist, dass aufgrund der Lorentz-Kovarianz sich die Normierung unter Lorentz-Boosts ändert. Wir können sicherlich die Zustände so wählen, dass sie für die *Standard-Impulse* k^μ orthonormal sind,

$$\langle\psi_{k',\alpha'}|\psi_{k,\alpha}\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\delta_{\alpha'\alpha}\,.$$

Unter einer Lorentz-Transformation $k \mapsto L(p)k = p$ geht dies über in

$$\langle\psi_{p',\alpha'}|\psi_{p,\alpha}\rangle = |\mathcal{N}(p)|^2\delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\delta_{\alpha'\alpha}\,.$$

Dieser Ausdruck kängt nun noch von den Dreier-Impulsen $\mathbf{k}', \mathbf{k}$ ab. Dies wollen wir umrechnen. Dazu betrachten wir die lorentz-invariante Integration einer skalaren Funktion $f(p)$ eines Vierer-Impulses p. Wir haben

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4p\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)f(p) &= \int \mathrm{d}^3p\mathrm{d}p^0\delta\left((p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2\right)\theta(p^0)f(p^0, \mathbf{p}) \\ &= \int \mathrm{d}^3p\frac{f(p^0 = E_\mathbf{p}, \mathbf{p})}{2E_\mathbf{p}}\,, \\ E_\mathbf{p} &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\,,\end{aligned}$$

wobei das erste Gleichheitszeichen gerade für die physikalisch relevanten Fälle gilt. Damit folgt sofort, dass der Ausdruck

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{E_\mathbf{p}}$$

lorentz-invariant ist. Man spricht auch von der *Integration auf der Massenschale*. Man ersieht aus obigen kleiner Rechnung, dass die Delta-Distribution nicht selbts lorentz-invariant ist, aber der Ausdruck

$$p^0\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = k^0\delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\,,$$

so dass also das Skalarprodukt zweier Ein-Teilchen-Zustände die Form

$$\langle\psi_{p',\alpha'}|\psi_{p,\alpha}\rangle = |\mathcal{N}(p)|^2\frac{p^0}{k^0}\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{\alpha'\alpha}$$

annimmt. Offenbar kann diese Formel für den Vakuumzustand so nicht gültig sein, man definiert dessen Norm schlicht zu $\langle 0|0\rangle = 1$.

$\boldsymbol{m > 0}$**.** Der Fall massiver Teilchen ist besonders einfach, da wir die kleine Gruppe SO(3) schon recht gut von der quantenmechanischen Behandlung des Drehimpulses her kennen. Sei also $W = R \in \mathrm{SO}(3)$ eine Drehung. Die irreduziblen Darstellungen hatten wir mit $\rho^{(j)}_{\alpha'\alpha}(R)$ bezeichnet. Sie hatten die Dimension $2j+1$, und $j \in \mathbb{Z}_+/2$. Also durchlaufen die Quantenzahlen $\alpha \in \{-j, -j+1, \ldots, j-1, j\}$ und entsprechen den magnetischen Quantenzahlen des Drehimpulses. Allerdings handelt es sich hier nicht um einen Bahndrehimpuls, sondern einer intrinsischen Quantenzahl, dem *Spin* des Teilchens. Offenbar gilt

$$U(\Lambda)|\psi_{p,\alpha}\rangle = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}}} \sum_{\alpha'} \rho^{(j)}_{\alpha'\alpha}(W(\Lambda, p))|\psi_{\Lambda p,\alpha'}\rangle$$

mit der *Wigner-Rotation* $W(\Lambda, p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) = R \in \mathrm{SO}(3)$. Hierbei ist wieder $L(p)$ der Standard-Boost, der den Standard-Impuls auf den Impuls p abbildet, also $L(p) : k^\mu = (m, 0, 0, 0) \mapsto p^\mu$. Konkret ist dies gegeben durch

$$\begin{aligned} L^i{}_k(p) &= \delta_{ik} + (\gamma - 1)\frac{p_i p_k}{\mathbf{p}^2}\,, \\ L^i{}_0(p) = L^0{}_i(p) &= \frac{p_i}{|\mathbf{p}|}\sqrt{\gamma^2 - 1}\,, \\ L^0{}_0(p) &= \gamma\,, \\ \gamma &= \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} = \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}{m}\,. \end{aligned}$$

Dieser Standard-Lorentz-Boost ist gegeben durch einen Boost in die z-Richtung, verziert mit den entsprechend notwendigen Drehungen $R(\mathbf{p})$ der z-Achse in die Richtung von $\mathbf{p}$ bzw. deren Inversen, $L(p) = R(\mathbf{p})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\mathbf{p})$, mit

$$B(|\mathbf{p}|) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\gamma^2 - 1} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Um den Fall massiver Teilchen abzuschließen, muss man sich nur noch davon überzeugen, dass für $\Lambda = R$ eine reine Drehung natürlich die Wigner-Rotation $W(R, p) = L^{-1}(Rp)RL(p) = R$ ist. Es folgt damit, dass massive Teilchen durch ihre Ruhemasse m und ihren intrinsischen Spin $\alpha = j$ charakterisiert sind. Wie wir bereits bei der Behandlung der Klein-Gordon-Gleichung in der Vorlesung gesehen haben, haben massive Teilchen noch eine weitere Quantenzahl, die Ladung q, da es in der relativistischen Quantenmechanik notwenigerweise Teilchen und deren Anti-Teilchen gibt. Wir werden noch sehen, dass dies nicht nur für Spin $j = 0$ Teilchen gilt (für die die Klein-Gordon-Gleichung richtig ist), sondern auch für Spin $j = 1/2$ Teilchen (für die die Dirac-Gleichung benötigt wird).

$\boldsymbol{m = 0}$. Der Fall *masseloser* Teilchen ist ein wenig trickreicher, und hält eine dicke Überraschung parat. Für Teilchen ohne Ruhemasse kann der Standard-Impuls nicht mehr im Ruhesystem des Teilchen genommen werden. Wir wissen bereits, dass in der speziellen Relativitätstheorie masselose Teilchen sich mit Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ bewegen, die in allen Inertialsystemen gleich ist. Daher ist ein sinnvoler Referenz-Impuls $k^\mu = (1, 0, 0, 1)$, so dass sich das Teilchen in Richtung der z-Achse bewegt. Was ist die kleine Gruppe deren Elemente durch $W^\mu_\nu k^\nu = k^\mu$ definiert sind? Wir bemerken zunächst, dass für einen rein zeitartigen Vektor $t^\mu = (1, 0, 0, 0)$ natürlich

$$\begin{aligned} t'^\mu = W^\mu_\nu t^\nu \quad &\text{mit} \quad t'^\mu t'_\mu = t^\mu t_\mu \\ &\text{und} \quad t'^\mu k_\mu = t^\mu k_\mu\,. \end{aligned}$$

gilt. Setzen wir unsere spezielle Wahl für t^μ und k^μ ein, so finden wir mit $(Wt)^\mu k_\mu = t^\mu k_\mu = 1$, dass der Vektor $(Wt)^\mu = t'^\mu = (1+\zeta, \alpha, \beta, \zeta)$ sein muss. Man beachte das auftreten einer Translation um ζ simultan in der 0- und der 3-Richtung. Mit der Bedingung $(Wt)^\mu(Wt)_\mu = t^\mu t^\mu = 1$ folgt dann weiter, dass $(1+\zeta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \zeta^2 = 1$ sein muss. Also gilt $\zeta = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$. Also operiert W auf t^μ wie die Lorentz-Transformation

$$S^\mu_\nu(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1+\zeta & \alpha & \beta & -\zeta \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \zeta & \alpha & \beta & 1-\zeta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \zeta = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\,.$$

Man beachte, dass nicht notwendig $W = S$ gilt! Es gilt aber, dass $S^{-1}(\alpha, \beta)W$ eine Lorentz-Transformation ist, für die $S^{-1}Wt^\mu = t^\mu$ ist. Damit haben wir erreicht, dass die Lorentz-Transformation $S^{-1}W \in \mathrm{SO}(3)$ eine reine Rotation der Raumrichtungen ist. Mit dieser komplizierten Umschreiberei haben wir also das Element W der kleinen Gruppe indirekt teilweise charakterisiert. Dies wollen wir noch weiter treiben um schließlich die kleine Gruppe vollständig bestimmen zu können. Wenden wir nun S auf den Referenz-Impuls k^μ an, so finden wir

$S^\mu{}_\nu k^\nu = ((1+\zeta)-\zeta, \alpha-\alpha, \beta-\beta, \zeta+(1-\zeta)) = (1,0,0,1) = k^\mu$. Es folgt, dass $S^{-1}W$ eine Rotation um die 3-Achse um einen Winkel θ sein muss, $S^{-1}W = R(\hat{\mathbf{z}}, \theta)$ mit

$$R^\mu{}_\nu(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} .$$

Ein allgemeines Element der kleinen Gruppe ist demnach von der Form $W(\alpha,\beta,\theta) = S(\alpha,\beta)R(\theta)$. Man sieht weiter sofort, dass $\theta = 0$ zu einer abelschen Untergruppe $S(\alpha',\beta')S(\alpha,\beta) = S(\alpha'+\alpha,\beta'+\beta)$ führt, und $\alpha = \beta = 0$ zu der abelschen Untergruppe $R(\theta')R(\theta) = R(\theta'+\theta)$. Schließlich gilt auch noch $R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta) = S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta, -\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)$. Dies bedeutet, dass die $S(\alpha,\beta)$ sogar eine invariante Untergruppe bilden. Mit ein wenig Kenntnis der Gruppentheorie kann man nun zeigen, dass die kleine Gruppe deshalb isomorph zu ISO(2) sein muss, also isomorph zur euklidischen Gruppe in zwei Dimensionen mit den Rotationen um den Winkel θ und den Translationen um (α,β).

Es tritt hier nun ein kleines Problem auf, da ISO(2) nicht mehr halbeinfach ist (sie besitzt eine invariante Untergruppe). Die Lie-Algebra von ISO(2) wird generiert durch $W^\mu{}_\nu(\theta,\alpha,\beta) = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \ldots$ mit

$$\omega^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & 0 & \theta & -\alpha \\ \beta & -\theta & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} .$$

Die unitäre Darstellung dieser infinitesimalen Transformation führt damit zu folgenden Generatoren, wobei wir die in der Vorlesung eingeführten Bezeichnungen für die Generatoren der Lorentz-Lie-Algebra verwenden:

$$\begin{aligned} U(W(\theta,\alpha,\beta)) &= 1\!\!1 + \mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B + \mathrm{i}\theta J_3 \,, \\ A &= -J^{13} + J^{10} \;=\; J_2 + K_1 \,, \\ B &= -J^{23} + J^{20} \;=\; J_1 + K_2 \,, \\ J_3 &= J^{12} \,. \end{aligned}$$

Diese Generatoren erfüllen die Algebra $[J_3, A] = +\mathrm{i}B$, $[J_3, B] = -\mathrm{i}A$, $[A, B] = 0$. Wir können also insbesondere J_3 nicht zum Satz der vollständig kommutierenden Observablen hinzunehmen, wohl aber A und B. Die Ein-Teilchen-Zustände sind also durch k^μ und a, b bestimmt, eine Basis sei $|\psi_{k,a,b}\rangle$ mit $A|\psi_{k,a,b}\rangle = a|\psi_{k,a,b}\rangle$ und $B|\psi_{k,a,b}\rangle = b|\psi_{k,a,b}\rangle$. Hat man nun einen Satz von Eigenwerten von A, B, also z.B. a, b, so erhalten wir allerdings gleich ein ganzes Kontinuum, denn mit $U(R(\theta))AU^{-1}(R(\theta)) = A\cos\theta - B\sin\theta$ und $U(R(\theta))BU^{-1}(R(\theta)) = A\sin\theta + B\cos\theta$ folgt, dass alle Zustände $|\psi^\theta_{k,a,b}\rangle = U^{-1}(R(\theta))|\psi_{k,a,b}\rangle$ Eigenzustände von A und B sind. Das Problem ist nur, dass wir keinerlei experimentelle Hinweise dafür haben, dass masselose Teilchen einen *kontinuierlichen* inneren Freiheitsgrad θ besitzen. Ein Ausweg aus diesem Dilemma ist die Forderung, dass die *physikalischen* Zustände Eigenzustände zu A, B mit $a = b = 0$ sein müssen. Dann gilt $A|\psi_{k,\alpha}\rangle = B|\psi_{k,\alpha}\rangle = 0$ und $J_3|\psi_{k,\alpha}\rangle = \alpha|\psi_{k,\alpha}\rangle$. Da $\mathbf{k}$ in die 3-Richtung zeigt, gibt J_3 den Drehimpuls in Richtung der Bewegung des Teilchens an, die sogenannte *Helizität*.

Bemerkung: Der Parameter θ korrespondiert zu einem Eich-Freiheitsgrad, der weggeeicht werden muss. Die Forderung $a = b = 0$ ist die Eichfixierung. Dies ist die abstrakte und allgemeine Formulierung eines Problems, dass notorisch bei masselosen Teilchen auftritt, die im Falle ganzzahligen Spins nicht umsonst auch Eich-Bosonen genannt werden. Masselose Teilchen haben keinen echten Spin als inneren Freiheitsgrad, sie besitzen nur eine einzige Spin-Quantenzahl in Fortbewegungsrichtung (diese Quantisierungsaches für die magnetische Spin-Quantenzahl kann also *nicht* willkürlich gewählt werden!), die Helizität, statt einer vollen Spin-Darstellung. Der Grund ist einfach, dass die kleine Gruppe nicht die volle SO(3) als Drehgruppe enthält, sondern nur noch eine SO(2) für Drehungen in der (1,2)-Ebene, also senkrecht zur 3-Achse.

Abschließend betrachten wir noch die finiten Transformationen der kleinen Gruppe:

$$U(S(\alpha,\beta)) = \exp(\mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B) \,, \quad U(R(\theta)) = \exp(\mathrm{i}\theta J_3) \,.$$

Mit $W = SR$ folgt also $U(W)|\psi_{k,\alpha}\rangle = \exp(\mathrm{i}\alpha A + \mathrm{i}\beta B)\exp(\mathrm{i}\theta J_3)|\psi_{k,\alpha}\rangle = \exp(\mathrm{i}\theta\alpha)|\psi_{k,\alpha}\rangle$. Die Darstellungs-Matrizen sind also ganz einfach

$$\rho_{\alpha'\alpha}(W) = \exp(\mathrm{i}\theta\alpha)\delta_{\alpha'\alpha} \,. \tag{$*$}$$

Definieren wir implizit $\theta(\Lambda, p)$ für eine beliebige Lorentz-Transformation Λ und beliebigen Vierer-Impuls p durch die Relation $W(\Lambda,p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) = S(\alpha(\Lambda,p),\beta(\Lambda,p))R(\theta(\Lambda,p))$, so ist

$$U(\Lambda)|\psi_{p,\alpha}\rangle = \sqrt{\frac{E_{\Lambda\mathbf{p}}}{E_\mathbf{p}}}\exp(\mathrm{i}\alpha\theta(\Lambda,p))|\psi_{p,\alpha}\rangle \,. \tag{$**$}$$

Die Helizität $\alpha \in \mathbb{R}$ ist bis jetzt eine beliebige Zahl. Man kann allerdings mit topologischen Argumenten zeigen, dass $\alpha \in \mathbb{Z}/2$ sein muss, also ähnlich wie der Spin für massive Teilchen eingeschränkt ist. Wenn nun Λ und p gegeben sind, wie sieht dann $W(\Lambda, p)$ aus? Mit $k^\mu = (\kappa, 0, 0, \kappa)$ ist $L(p) = R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/\kappa)$ mit

$$B(u) = \begin{pmatrix} \frac{u^2+1}{2u} & 0 & 0 & \frac{u^2-1}{2u} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{u^2-1}{2u} & 0 & 0 & \frac{u^2+1}{2u} \end{pmatrix} .$$

Die Rotation $R(\hat{\mathbf{p}})$ bildet die 3-Achse auf die Richtung von $\mathbf{p}$ ab, also $\hat{\mathbf{z}} \mapsto (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Also ist $R(\hat{\mathbf{p}}) = R(\hat{\mathbf{z}}, \phi)R(\hat{\mathbf{y}}, \theta)$ und damit

$$U(R(\hat{\mathbf{p}})) = \exp(-\mathrm{i}\phi J_3)\exp(-\mathrm{i}\theta J_2)$$

für $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Diese Darstellung ist nicht eindeutig, aber jede andere Rotation $\hat{\mathbf{z}} \mapsto \hat{\mathbf{p}}$ unterscheidet sich von dieser nur um eine initiale und beliebige Rotation um die 3-Achse.

Die Helizität ist lorentz-invariant, so haben wir das ganze ja konstruiert. Allerdings geht unter der Paritätsoperation $\mathcal{P} : \mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ die Helizität ebenfalls in ihr negatives über, $\alpha \mapsto -\alpha$. Ist die Wechselwirkung der Teilchen miteinander invariant unter $\mathcal{P}$, so sind Teilchen mit Helizitäten $\pm\alpha$ ununterscheidbar und werden daher miteinander identifiziert. Die Helizitäten $\alpha = \pm 1$ beschreiben Photonen, während $\alpha = \pm 2$ Gravitonen beschreibt. Die schwache Wechselwirkung hingegen ist nicht $\mathcal{P}$-invariant. Daher entsprechen der Helizität $\alpha = +\frac{1}{2}$ Neutrinos, der Helizität $\alpha = -\frac{1}{2}$ hingegen Antineutrinos, also verschiedene Teilchen. Man beachte, dass zwar die Helizität lorentz-invariant ist, nicht aber die Zustände, aufgrund der Phase $\exp(\mathrm{i}\theta\alpha)$ in $(*)$. Ein allgemeiner Ein-Photon-Zustand ist also $|\psi_{p,\epsilon}\rangle = \epsilon_+|\psi_{p,+1}\rangle + \epsilon_-|\psi_{p,-1}\rangle$ mit $|\epsilon_+|^2 + |\epsilon_-|^2 = 1$. Dies legt die *Polarisation* der Photonen fest. Die gängigen Fälle sind:

(1) *Linear polarisiert*: $|\epsilon_+| = |\epsilon_-|$ und die relative Phase zwischen ϵ_+ und ϵ_- ist signifikant.
(2) *Zirkular polarisiert*: $\epsilon_+ = 0$ oder $\epsilon_- = 0$.
(3) *Elliptisch polarisiert*: $|\epsilon_+| \neq |\epsilon_-|$, $\epsilon_+, \epsilon_- \geq 0$.

Bei linearer Polarisierung ist übrigens $\epsilon_- = \epsilon_+^*$ eine mögliche Wahl. Die Phase von ϵ_+ entspricht dann dem Winkel der Polarisationsebene mit einer fixierten Referenzrichtung orthogonal zu $\mathbf{p}$. Dieser Winkel rotiert mit $\theta(\Lambda, p)$ bei Lorentz-Transformationen gemäß $(**)$.

Relativistische Wellengleichungen

Die Analyse der möglichen Darstellungen der Poincaré-Gruppe ist sehr hilfreich, um gute Kandidaten für die relativistischen Pendants der Schrödinger-Gleichung zu finden. Dies muss man im Prinzip getrennt für den Fall massiver bzw. masseloser Teilchen tun, und dann für jede Spin-Darstellung bzw. Helizität. Hier fassen wir noch ganz kurz die Resultate für massive Teilchen mit Spin null (skalare Bosonen) und Spin $1/2$ (Fermionen) zusammen. Achtung: zur besseren Übung wurde im folgenden $c = 1$ gesetzt. Die Formeln sehen daher ein wenig anders aus, als in der Vorlesung.

Klein-Gordon-Gleichung. Skalare Teilchen haben keinen Spin, so dass die Darstellung der kleinen Gruppe trivial ist. Man geht einfach von der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung aus und wendet das Korrepondenz-Prinzip an. Wie in der Vorlesung diskutiert führt allerdings der Ansatz $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ zu einer Theorie, die Lokalität und damit Kausalität verletzt. Man kann also nicht mehr mit Ableitungen erster Ordnung auskomnen ($E \mapsto \mathrm{i}\hbar\partial_t$, $\mathbf{p} \mapsto -\mathrm{i}\hbar\nabla$). Geht man statt dessen von der Relation $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ aus, so läßt sich eine lokale Gleichung gewinnen, nämlich die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\Psi = 0\,.$$

Diese Gleichung ist manifest lorentz-invariant, da die Ruhemasse sowie das Skalarprodukt beides lorentz-invariante Ausdrücke sind. Die Ankopplung eines äußeren elektromagnetischen Feldes ist ganz einfach, wenn man einfach $\partial_0 \mapsto D_0 = \partial_0 + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\phi(\mathbf{r}, t)$ und $\partial_k \mapsto D_k = \partial_k - \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}A_k(\mathbf{r}, t)$ setzt ($k = 1, 2, 3$), also die sogenannten *kovarianten* Ableitungen $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}A_\mu$ anstelle der gewöhnlichen Ableitungen ∂_μ verwendet. Die Klein-Gordon-Gleichung ändert ihre Form dadurch nicht,

$$(D^\mu D_\mu + m^2)\Psi = 0\,.$$

In der Vorlesung hatten wir ausführlich die Konsequenzen diskutiert, die die Klein-Gordon-Gleichung mit sich bringt. Die Gleichung ist zweiter Ordnung in der Zeit. Deshalb gibt es keine positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte. Außerdem benötigt man doppelt so viel Information zur Beschreibung der Zeitentwicklung (nämlich Ψ und

$\partial_t\Psi$). Schließlich ist man mit dem Problem konfrontiert dass die Klein-Gordon-Gleichung Lösungen mit negativer Energie besitzt. Ein konsistenter und mit den experimentellen Fakten verträglicher Ausweg ist, die Lösungen negativer Energie als Antiteilchen zu interpretieren. Außerdem muss man, um die Wahrscheinlichkeitsdichte vernünftig interpretieren zu können, den Teilchen eine weitere intrinsische Quantenzahl, die *Ladung*, zuweisen. Teilchen und Antiteilchen haben entgegengesetzte Ladungen. Es stellt sich heraus, dass diese Ladung in der Tat die elektrische Ladung ist, da sie in genau der richtigen Weise an ein äußeres elektromagnetisches Feld koppelt. Ist $\Psi = \Psi_{(m,\mathbf{p}),0,q}$ Lösung der Klein-Gordon-Gleichung mit Ruhemasse m, Impuls $\mathbf{p}$, Spin null und Ladung q, so ist Ψ^* ebenfalls eine Lösung, allerdings mit der negativen Ladung $-q$. Diese Lösung entspricht dem Antiteilchen. Die sogenannte *Ladungskonjugation* $\mathcal{C}$ vertauscht Teilchen und Antitielchen via

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & : & \Psi & \mapsto & \Psi^* \\ & & m,\mathbf{p},q & \to & m,-\mathbf{p},-q \end{array}$$

Wie man sofort sieht, sollte daher die Verkettung mit der Paritätsumkehr, $\mathcal{CP} : m,\mathbf{p},q \to m,\mathbf{p},-q$, einfach Teilchen durch ihre Antiteilchen ersetzten, die aber weiterhin in die selbe Richtung laufen. Die elektromagnetische Wechselwirkung ist bezüglich dieser Operation symmetrisch. Man sagt auch, sie ist $\mathcal{CP}$-invariant. Für die schwache Wechselwirkung gilt dies nicht mehr. Man kann allerdings in einem axiomatischen Zugang zur Quantenfeldtheorie folgendes zeigen:

THEOREM [Streater, Weightman]: *Eine Quantenfeldtheorie, in der (a) die elementaren Objekte im Gültigkeitsbereich der Theorie als punktförmig angesehen werden können, die (b) lorentz-invariant ist, und die (c) mikrokausal ist (diese Forderung wird zum Beispiel beim Ansatz $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ für die Klein-Gordon-Gleichung verletzt, wie wir in der Vorlesung diskutiert haben), gestattet für den intrinsischen Spin- bzw. Helizitäts-Freiheitsgrad nur ganz- oder halbzahlige Werte und ist ferner $\mathcal{CPT}$-invariant.*

Die Wahrscheinlichkeitsdichte und der Wahrscheinlichkeitsstrom sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r},t) &= \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^*\right) , \\ \mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right) . \end{aligned}$$

In der Tat ist ρ nicht positiv definit, z.B. ist $\rho < 0$ für eine Lösung mit negativer Energie. Die Interpretation als Ladungsdichte anstatt als Wahrscheinlichkeitsdicht läßt dies jedoch als unproblematisch erscheinen, da dies dann einfach die (positive) Dichte negativ geladener Teilchen ist. Die freie Lösung der Klein-Goron-Gleichung ist natürlich einfach eine Welle,

$$\Psi(\mathbf{r},t) \;=\; \Psi_{p,0}(\mathbf{r},t)\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p_\mu x^\mu) \;=\; \exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(E_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}))\,,$$

wobei wir die Ladungs-Quantenzahl unterdrückt haben und wobei beide Lösungen $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ für die Energie möglich sind.

Dirac-Gleichung. Die Herleitung der Dirac-Gleichung ist wesentlich komplizierter. Sie soll hier nicht wiederholt werden. In wesentlichen muss man untersuchen, wie die Spin-Operatoren unter der Aktion der Lorentz-Gruppe transformieren. Dies führt dazu, dass Teilchen mit Spin $1/2$ in Form von Vierer-Spinoren auftreten. Mit $\boldsymbol{\sigma}$ dem Vektor der drei Pauli-Matrizen und $\sigma^0 = 1\!\!1$ definiert man die Dirac-Matrizen als

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} \sigma^0 & \\ & -\sigma^0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \\ & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine von mehreren Lösungen der algebraischen Beziehungen ($\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ ist die Metrik der Minkowski-Raumzeit)

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} \;=\; 2\eta^{\mu\nu}\,, \quad \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] \;=\; \sigma^{\mu\nu}\,, \quad \sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\alpha^1 & \mathrm{i}\alpha^2 & \mathrm{i}\alpha^3 \\ -\mathrm{i}\alpha^1 & 0 & +\tau^3 & -\tau^2 \\ -\mathrm{i}\alpha^2 & -\tau^3 & 0 & +\tau^1 \\ -\mathrm{i}\alpha^3 & +\tau^2 & -\tau^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der hier auftretende antisymmetrische Tensor ist die relativistische Verallgemeinerung des Spin-Operators, ganz analog zum Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ in der Elektrodynamik, der das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}$ lorentz-kovariant zusammenfasst. Die Pauli-Matrizen σ^k werden durch vier-dimensionale Pendants τ^k ersetzt, die aus zwei Kopien von ihnen bestehen, die Matrizen α^k sind neu und sind so definiert, dass der antisymmetrische Tensor lorentz-kovariant transformiert. Genauer gilt folgendes: Bei einem Lorentz-Boost in eine bestimmte Richtung transformieren sich die Spin-Operatoren gemäß

$$\begin{aligned} \tau'_\parallel &= \tau_\parallel\,, & \mathrm{i}\alpha'_\parallel &= \mathrm{i}\alpha_\parallel\,, \\ \boldsymbol{\tau}'_\perp &= (\boldsymbol{\tau}_\perp - \mathrm{i}\mathbf{v}\times\boldsymbol{\alpha})(1-v^2)^{-1/2}\,, & \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}'_\perp &= (\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_\perp + \mathbf{v}\times\boldsymbol{\tau})(1-v^2)^{-1/2}\,. \end{aligned}$$

Die konkrete Form von α^k und τ^k ergibt sich erst, wenn man die Spin $1/2$ Darstellung betrachtet, für die (und nur für die!) speziell die Relation $\tau^j\tau^k = \mathrm{i}\sum_l \varepsilon_{jkl}\tau^l + \delta_{jk}$ gilt. Die algebraischen Beziehung, denen die γ^μ etc. genügen müssen, definieren eine sogenannte *Clifford-Algebra*. Dies ist typisch für Fermionen. Wir haben schon bei der Vielteilchen-Quantenmechanik gesehen, dass Fermionen durch Antikommutatoren beschrieben werden. Die hier angegebene Lösung mit Vierer-Spinoren ist die kleinste mögliche Darstellung der Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, die auch lorentz-kovarianz erfüllt, d.h. für die auch $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}$ gilt.

Die Spin-Operatoren $\boldsymbol{\tau}$ wirken im Spin-Freiheitsgrad und formen eine Darstellung der Drehungen des Ortsraum-Koordinatensystems. Entsprechend formen die Oepratoren $\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}$ eine Darstellung im Spin-Raum von den Rotationen einer Raumachse mit der Zeitachse, also von den Lorentz-Boosts. Eine Rotation umd $\boldsymbol{\phi}$ mit Drehachse in Richtung von $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ und um einen Winkel $\phi = |\boldsymbol{\phi}|$ wirkt also auf den Operatoren $\gamma^\mu, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}$ etc. gemäß

$$\boldsymbol{\tau}' = R(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\tau}R^{-1}(\boldsymbol{\phi})\,, \quad \boldsymbol{\alpha}' = R(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\alpha}R^{-1}(\boldsymbol{\phi})\,, \quad \beta' = \gamma^{0\prime} = R(\boldsymbol{\phi})\beta R^{-1}(\boldsymbol{\phi}) \quad \text{mit} \quad R(\boldsymbol{\phi}) = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi})\,.$$

Entsprechend ist die Wirkung unter einem Lorentz-Boost zu einem Inertialsystem mit relativer Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ zum ursprünglichen Inertialsystem gegeben durch

$$\boldsymbol{\tau}' = \Lambda(\mathbf{v})\boldsymbol{\tau}\Lambda^{-1}(\mathbf{v})\,, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \Lambda(\mathbf{v})\boldsymbol{\alpha}\Lambda^{-1}(\mathbf{v})\,, \quad \beta' = \gamma^{0\prime} = \Lambda(\mathbf{v})\beta\Lambda^{-1}(\mathbf{v}) \quad \text{mit} \quad \Lambda(\mathbf{v}) = \exp(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\omega})\,,$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \hat{\mathbf{v}}$ und $\tanh\omega = v$ ist.

Die Dirac-Gleichung ergibt sich nun einfach dadurch, dass man eine manifest lorentz-invariante Größe hinschreibt, die sowohl dem Impuls des Teilchens als auch seinem Spin Rechnung trägt. Die einfachste Möglichkeit dafür ist, den Skalar $\gamma^\mu p_\mu$ zu verwenden. In der Tat ist die Dirac-Gleichung für ein Teilchen der Ruhemasse m gegeben durch

$$(\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0\,.$$

Die Kopplung an ein äußeres elektromagnetisches Feld ist wieder ganz einfach,

$$(\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0\,.$$

Dass dies vernünftige Gleichungen sind erkennt man daran, dass $(\gamma^\mu p_\mu)^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$ die relativistisch korrekte Energie-Impuls-Beziehung liefert. Die Dirac-Gleichung selbst entspricht dem Ausdruck

$$\gamma^0 E = \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m\,,$$

den man manchmal in den Lehrbüchern dadurch herleitet, dass man aus der relativistischen Beziehung $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ versucht die “Wurzel” zu ziehen. Dirac selbst hat in der Tat einfach $E = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m$ angesetzt und dann abgeleitet, dass $\boldsymbol{\alpha}$ und β keine Zahlen, sondern 4×4 Matrizen sein müssen, die bestimmte algebraische Eigenschaften erfüllen müssen. Erst später hat man erkannt, dass die Form der Dirac-Gleichung durch Lorentz-Invarianz für einen Spin $1/2$ inneren Freiheitsgrad zwingend festgelgegt ist. Auch die Dirac-Gleichung erzwingt die Existenz von Antiteilchen. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeitsdichte positiv definit. Man findet

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \Psi^+\Psi\,, \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \Psi^+\boldsymbol{\alpha}\Psi\,, \end{aligned}$$

die die Kontinuitätsgleichung $\partial_t(\Psi^+\Psi) + \nabla(\Psi^+\boldsymbol{\alpha}\Psi) = \partial_\mu j^\mu = 0$ erfüllen (wobei $j^0 = \rho$ gesetzt wird). Für Fermionen sind wir also zunächst *nicht* gezwungen, die Dichte ρ als Ladungsdichte zu interpretieren, wir können sie wie bei der Schrödinger-Gleichung als Wahrscheinlichkeitsdichte ansehen.

Eine nützliche Beobachtung ist noch die folgende: Wir haben gesehen, dass γ^μ wie ein Vierer-Vektor transformiert. Man kann nun aus den γ^μ zusammen mit $\mathbb{1}$ jede beliebige 4×4 Matrix als Linearkombination aus den Ausdrücken

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{1} & \gamma^\mu & \sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] & \gamma_5\gamma^\mu & \gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ \text{Skalar} & \text{Vektor} & \text{antisymm. Tensor} & \text{Pseudovektor} & \text{Pseudoskalar} \end{array}$$

schreiben. Dies sind genau 16 lienar unabhängige Matrizen. Man beachte insbesondere, dass γ_5 lorentz-invariant ist, aber unter der Parität als $\gamma^0\gamma_5\gamma^0 = -\gamma_5$ transformiert. In der Tat können alle Wechselwirkungen, die wir zur Dirac-Gleichung hinzufügen können, in diese fünf Möglichkeiten aufgeteilt werden. Die schwache Wechselwirkung erhält zum Beispiel nicht die Parität, hat also einen pseudoskalaren oder pseudovektoriellen Anteil. Pseudovektoren werden oft auch axiale Vektoren genannt, und in der Tat tritt in der heutigen Beschreibung der schwachen Wechselwirkung im Rahmen des Standardmodells ein sogenannter axialer Strom auf, der die Parität nicht erhält.