

Das KAM-Theorem

Karsten König & Karoline Rüsseler

19.06.2013

Einführung

Wiederholung wichtiger Punkte

- **Normalform:** Die Hamiltonfunktion H ist in allen Ortsvariablen q_i , $i = 1, \dots, n$ zyklisch, d.h. es existieren n Erhaltungsgrößen
⇒ Lösung ist trivial, da alle n Impulskoordinaten p_i erhalten sind (dies sind also gerade die erwähnten n Erhaltungsgrößen).

$$p_i(t) = p_i(0) = \alpha_i \equiv \text{const.}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \omega_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Leftrightarrow q_i(t) = \omega_i t + \beta_i$$

Dies sind gerade die Winkelwirkungsvariablen mit

$$\mathbf{I} := \mathbf{p}, \quad \phi := \mathbf{q}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \text{Frequenzen auf dem Torus}$$

- Hat H Normalform verlaufen die Trajektorien im $2n$ -dimensionalen Phasenraum auf einer n -dimensionalen Untermannigfaltigkeit. Dabei gilt $\phi \sim \phi + 2\pi$.

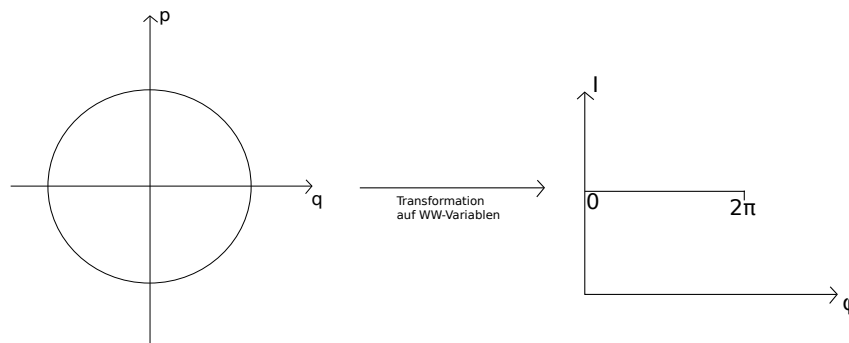


Abbildung 1: 1D-Pendel im Phasenraum

- In Fall $n = 2$ sind die Trajektorien in der $\phi_1\phi_2$ -Ebene geraden. Für rationale Frequenzverhältnisse sind diese geschlossen (periodische Bewegung), für irrationale nicht (quasiperiodisch) und füllen den Torus dicht aus. Ein rationales Verhältniss erfüllt immer die Beziehung $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n = 0, k_i \in \mathbb{Z}$.

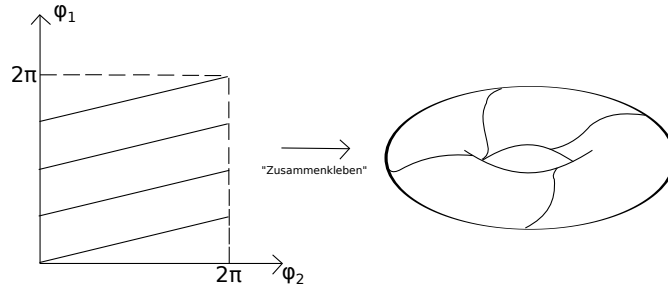


Abbildung 2: Geschlossene Trajektorien

Historischer Überblick

Die Grundfrage lautet: Bringt man eine Störung auf ein integrierbares System auf, bleiben dann die Trajektorien stabil, d.h. lässt sich eine Normalform finden?

Mathematiker wie Laplace, Poisson, Lagrange und Poincaré untersuchten diese Frage insb. in der Himmelsmechanik. Besonders interessant ist die Frage für $t \rightarrow \infty$, d.h. ob z.B. unser Sonnensystem in ferner Zukunft stabil bleibt. Damalige Methoden konnten nur Vorhersagen für die nächsten paar hundert Jahre treffen. Poincaré war der Meinung, dies ist nicht zu beantworten, wobei er dies daraus schloss, dass bereits das Dreikörperproblem nicht integrierbar ist und somit keine Normalform besitzt (der dritte Körper würde der Störung entsprechen). Weierstraß hingegen glaubte, dass man unter bestimmten Voraussetzungen die Frage teilweise beantworten konnte und stützte sich dabei auf Dirichlet, der nach Kronecker einen Beweis gefunden haben soll, aber nicht niederschrieb. Erst Kolmogorov, Arnol'd und Moser beantworteten mit ihrem **KAM**-Theorem die Frage teilweise.

Beweisskizze in zwei Dimensionen

Das KAM-Theorem: *Wenn ein ungestörtes System nicht entartet ist, dann gilt bei Aufbringen einer genügend kleinen hamiltonschen Störung, dass die meisten nicht-resonanten invarianten Tori nur leicht deformiert werden. Auch im Phasenraum des gestörten Systems existieren invariante Tori, die von den Phasenbahnen dicht und quasiperiodisch umspunnen werden, wobei die Frequenzen rational unabhängig sind. Diese invarianten Tori bilden die Mehrheit in dem Sinne, dass das Maß des Komplements ihrer Vereinigung klein ist, wenn die Störung schwach ist.*

Für begrenzte Zeitintervalle sind gestörte hamiltonsche Systeme berechenbar, aber nicht mehr für sehr große Zeiten ($t \rightarrow \infty$), denn es ergeben sich divergente Reihen:

Arnold nennt es das Problem der „kleinen Nenner“: Um den Einfluss der Störung zu berechnen, führt man eine Reihenentwicklung durch. Dabei muss man durch Linearkombinationen von Frequenzen des ungestörten Systems teilen. Befindet man sich in der Resonanzfrequenz werden solche Kombinationen Null. Dies führt zu einer Singularität.

Wir betrachten dies in einem System mit zwei Freiheitsgraden: Auf ein ungestörtes System in Normalform $H_0(\mathbf{I})$ wird eine kleine Störung $\varepsilon H_1(\mathbf{I}, \phi)$ mit $\varepsilon \ll 1$ aufgebracht. Die neue Hamiltonfunktion lautet:

$$H(\mathbf{I}, \phi) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \phi)$$

ϕ und \mathbf{I} sind jetzt keine Winkelwirkungsvariablen, denn H hat nicht Normalform. Wir suchen nun also eine kanonische Transformation $(\mathbf{I}, \phi) \rightarrow (\mathbf{I}^*, \phi^*)$ mit einer Erzeugenden $F(\phi, \mathbf{I}^*)$, sodass die neue Hamiltonfunktion K nur noch von \mathbf{I}^* abhängt. Die Frage nach der Stabilität der Bahn wird also zurückgeführt auf die Lösbarkeit der Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right) = H_0\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right) + \varepsilon H_1\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}, \phi\right)$$

Es gilt hierbei

$$\mathbf{I} = \frac{\partial F}{\partial \phi}, \quad \phi^* = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}^*}$$

Für die ungestörte Bewegung mit $\varepsilon = 0$ müssen die neuen Variablen gerade die Winkelwirkungsvariablen sein, also $F \equiv Id$. Das heißt die Entwicklung der Erzeugenden nach ε muss lauten

$$\begin{aligned} F(\phi, \mathbf{I}^*) &= \phi \mathbf{I}^* + \varepsilon F_1(\phi, \mathbf{I}^*) + O(\varepsilon^2) \\ \Rightarrow \frac{F(\phi, \mathbf{I}^*)}{\partial \phi} &= \mathbf{I}^* + \varepsilon \frac{F_1(\phi, \mathbf{I}^*)}{\partial \phi} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Eingesetzt in die HJ-Gl. ergibt sich die Entwicklung der Summanden

$$\begin{aligned} H_0\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right) &= H_0\left(\mathbf{I}^* + \varepsilon \frac{F_1(\phi, \mathbf{I}^*)}{\partial \phi} + O(\varepsilon^2)\right) = H_0(\mathbf{I}^*) + \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} \frac{\partial F_1}{\partial \phi} + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon H_1\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right) &= \varepsilon H_1\left(\mathbf{I}^* + \varepsilon \frac{F_1(\phi, \mathbf{I}^*)}{\partial \phi} + O(\varepsilon^2)\right) = \varepsilon H_1(\mathbf{I}^*, \phi) + O(\varepsilon^2) \\ \Rightarrow K(\mathbf{I}^*) &= H_0(\mathbf{I}^*) + \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} \frac{\partial F_1}{\partial \phi} + \varepsilon H_1(\mathbf{I}^*, \phi) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Damit K nur noch von \mathbf{I}^* abhängt muss also gelten

$$\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} \frac{\partial F_1}{\partial \phi} = \boldsymbol{\omega}_0 \frac{\partial F_1}{\partial \phi} = -(\mathbf{I}^*, \phi)$$

Die Störungen H_1 , F_1 sind also periodisch und lassen sich damit als Fourierreihen schreiben

$$H_1 = \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ \text{nicht beide } 0}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} H_{1n_1n_2} e^{in_1\phi_1 + n_2\phi_2}$$

$$F_1 = \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ \text{nicht beide } 0}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} F_{1n_1n_2} e^{in_1\phi_1 + n_2\phi_2}$$

Eingesetzt ergibt der Koeffizientenvergleich

$$F = \phi \mathbf{I} * + \varepsilon i \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ \text{nicht beide } 0}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{H_{1n_1n_2}}{\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2} e^{in_1\phi_1 + n_2\phi_2}$$

Diskussion

Für rationale Frequenzverhältnisse lassen sich keine Aussagen treffen, d.h. wenn überhaupt sagt das Theorem nur etwas für quasiperiodische Bewegungen voraus. Da aber irrationale Zahlen beliebig durch rationale approximiert werden können, liegt die Vermutung nahe, dass es auch viele irrationale Verhältnisse gibt, s.d. der Torus zerstört wird (später dazu mehr).

Das KAM-Theorem stellt daher Bedingungen für das Verhältniss auf, damit die Reihe konvergiert und somit die HJ-Gl. lösbar wird, d.h. das immer noch eine Normalform für H existiert. Zuerst muss gelten

$$\det \frac{\partial \omega}{\mathbf{I}} \neq 0$$

d.h. die Jacobimatrix ist nicht entartet. Dann kann man die KAM-Bedingung aufschreiben:

$$\left| \frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{i}{j} \right| > c(\varepsilon) j^{-5/2}$$

mit $c \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $i, j \in \mathbb{Z}$ ohne gemeinsamen Faktor.

Wir berechnen nun die Länge der ausgeschlossenen Intervalle. Für ein bestimmtes j lautet diese

$$\delta(j) = 2c(\varepsilon) j^{-5/2}$$

wobei es reicht die Werte für $\omega_2 \leq \omega_1$ und damit $i = 0, \dots, j - 1$ zu betrachten. Eingezeichnet in ein Diagramm sieht das etwa so aus:

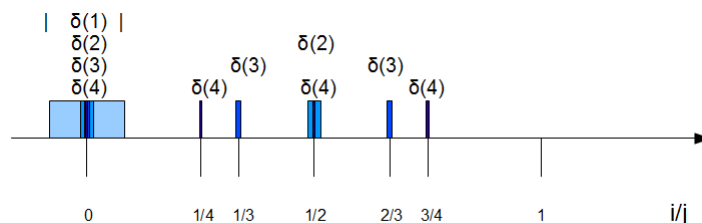


Abbildung 3: Darstellung der ausgeschlossenen Intervalle um jede rationale Zahl i/j

Die Gesamtlänge aller ausgeschlossenen Intervalle ergibt sich aus der Summe von

$$l(j) = j\delta(j) = 2c(\varepsilon)j^{-3/2}$$

$$L < \sum_{j=1}^{\infty} l(j) = 5.21c(\varepsilon)$$

Für kleine ε ist der ausgeschlossene Bereich also nahezu Null. D.h. die meisten irrationalen Frequenzverhältnisse erfüllen die KAM-Bedingung und führen zu stabilen Trajektorien. Physikalisch gesehen kann man sowieso nicht zwischen rationalen und irrationalen Verhältnissen unterscheiden, d.h. für kleine Störungen bleiben die meisten Trajektorien stabil.

Dies Folge der Lücken ist sogar eine Cantor-Menge, insb. mit Maß Null (MaPhyI, Blatt 1). Dies wäre eine weitere Erklärung, warum die meisten Tori stabil bleiben.

Wie gerade schon angedeutet, gibt es auch irrationale Verhältnisse, für die die Tori zerfallen. Dies liegt daran, dass irrationale Zahlen beliebig durch rationale angenähert werden können. Wächst ε an, so gibt es immer weniger Frequenzen, sodass die Bedingung erfüllt ist. Es liegt daher insgesamt die Vermutung nahe, dass die letzte Zahl ν , die zerfällt, der goldene Schnitt ist, da dies die irrationalste Zahl ist, d.h. die Zahl, die sich am schlechtesten durch rationale angenähert werden kann.

$$\nu = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Numerische Experimente von Greene legen nahe, dass dem in den meisten Fällen so ist.

Zuletzt sei gesagt, dass dies ein *hinreichendes* Kriterium ist, für die ausgeschlossenen Frequenzen wird keine Aussage getroffen. Wir vermuten aber, dass in der Nähe zu einem rationalen Verhältniss die Tori zerfallen.

Instabile Tori

Habe ein System zwei Freiheitsgrade, sei H erhalten und habe Normalform. D.h. die Trajektorien befinden sich auf einer 3-dim. Untermannigfaltigkeit. Wir betrachten nun einen Schnitt durch den Phasenraum für ein konstantes q (s. Vortrag Poincaré-Schnitte). Wir betrachten einen Schnitt durch den Torus im *Phasenraum*.

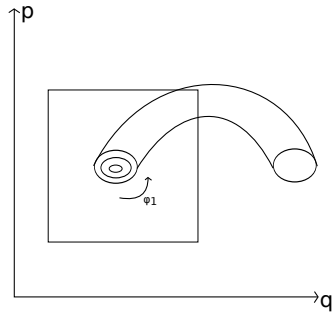


Abbildung 4: Schnitt durch Torus

Die Punkte auf der Schnittfläche ergeben sich in Polarkoordinaten mit „*Moser's twist map*“ T .

$$r_{i+1} = r_i (\equiv r)$$

$$\phi_{i+1} = \phi_i + 2\pi\nu(r_i)$$

Die Abhängigkeit von r_i bei ν ist dadurch gerechtfertigt, dass I den Radius des Torus definiert und $\omega = \frac{\partial H}{\partial I}$ gilt. Wie ist die Abbildung aber genau gemeint?

Man betrachtet auf dem Torus eine (quasi-)periodische Bahn und zeichnet auf der Schnittfläche die Punkte ein, in denen die Kurve durch die Fläche hindurchtritt und weist den Durchtrittspunkten aufsteigende Indizes zu. Die Twist Map gibt nun den nächsten Durchtrittspunkt an. Man nennt die Kurven, die zu geschlossenen Bahnen gehören auch KAM-Kurven oder KAM-Tori.

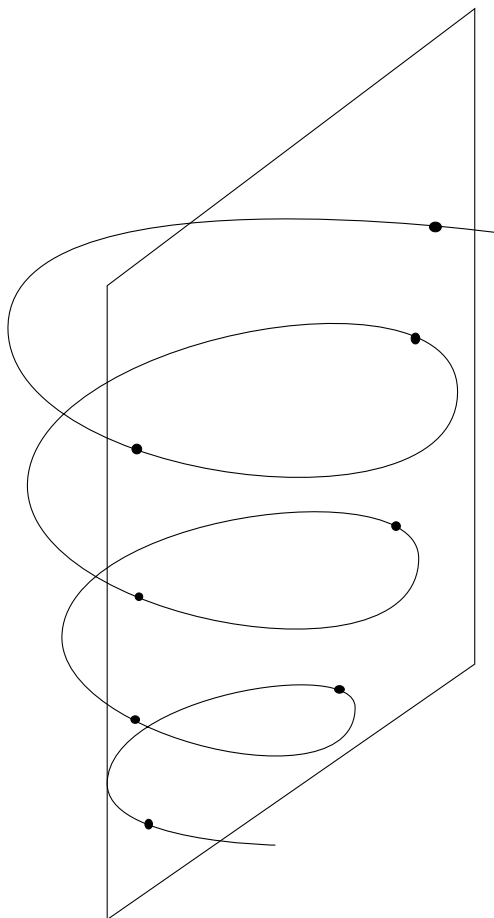


Abbildung 5: Den Kreis zeichnen

Eine andere Wahl der Koordinaten wird „*Chirikov standard map*“ genannt. K gibt den Grad der Störung in Abhängigkeit von ε an.

$$\bar{p} = p + K \sin(q)$$

$$\bar{q} = q + \bar{p}$$

Für ein rationales Frequenzverhältniss sollte nach m Iterationen ein Punkt wieder auf sich selbst abgebildet werden. Es ist daher gerechtfertigt für die m -fache Iteration von T , bezeichnet mit T^m , zu schreiben

$$r_{i+1} = r_i$$

$$\phi_{i+1} = \phi_i + 2\pi\nu m$$

denn ist ν eine rationale Zahl $\frac{k}{m}$ (keine gleichen Teiler!), gilt

$$\phi_{i+1} = \phi_i + 2\pi k$$

Insb. erhält man für periodische Bahnen keinen dichten Kreis, sondern nur einzelne Punkte auf einem!

Nehmen wir nun an, dass ν mit r wächst und nehmen wir an, dass c eine Kurve einer periodischen Bahn ist. Dann kann man größeren bzw. kleineren Frequenzen für die Abbildung T^m einen Drehsinn zuordnen, d.h. $\nu < \frac{k}{m}$ dreht mit dem Uhrzeigersinn, denn T^m beschreibt dann einen Punkt der etwas weiter rechts liegt, und $\nu > \frac{k}{m}$ dreht gegen den Uhrzeigersinn, denn T^m beschreibt einen Punkt der etwas weiter links liegt.

Bringen wir nun eine Störung auf. Diese lässt sich in der Twist Map wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} r_{i+1} &= r_i + \varepsilon f(r_i, \phi_i) \\ \phi_{i+1} &= \phi_i + 2\pi\nu + \varepsilon g(r_i, \phi_i) \end{aligned}$$

Wir nennen diese Abbildung T_ε . Nach dem KAM-Theorem ist die Störung auf den äußeren und inneren Kreis gering, insb. kann man annehmen, dass für T_ε^m der Drehsinn erhalten bleibt. Da sich der Drehsinn von innen nach außen ändert muss dazwischen eine Trajektorie c liegen, die nicht gedreht wird. Durch die Störung wird der Radius aber trotzdem geändert. Nach dem Satz von Liouville ist T_ε flächentreu.

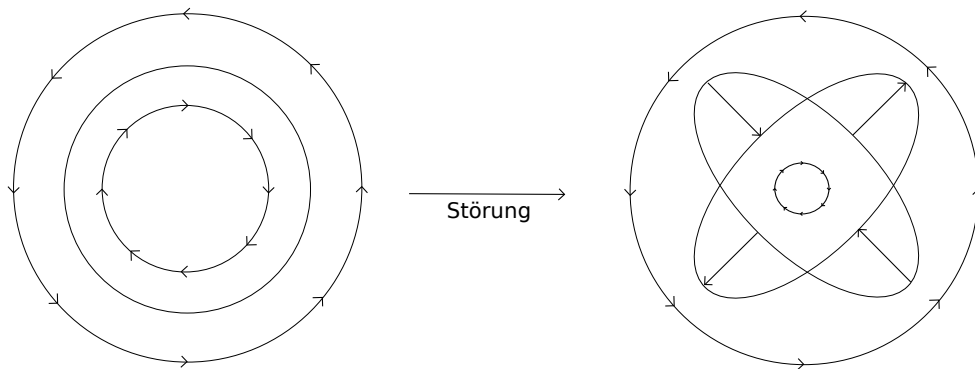


Abbildung 6: Verformung des Torus

Durch die Flächentreue folgt, dass sich die gedrehten Ellipsen in einer geraden Anzahl an Punkten schneiden müssen. Wichtig hierbei ist, dass diese Schnittpunkte Fixpunkte sind, d.h. sie bleiben an ihrem Ort unabhängig von T_ε (Satz von Poincaré-Birkhoff).

Was bedeutet das? Die Kreise des ungestörten Systems umgeben einen gemeinsamen Fixpunkt. T lässt diesen invariant. Nun sind diese neuen Fixpunkte auch wieder solche Fixpunkte. Es existieren sog. elliptische Fixpkt. und hyperbolische Fixpkt. (außerdem auch parabolische, was ein sehr schwieriges Thema sein soll), d.h. die elliptischen sind von Kreisen und Ellipsen umgeben und die hyperbolischen werden von Hyperbeln angenähert. Man erklärt dies über Eigenwerte im Poincaré-Schnitt in der komplexen Ebene.

Um die neuen Fixpunkte existieren also wieder Ellipsen und Hyperbeln. Betrachten wir die elliptischen: Mit der gleichen Argumentation wie eben, kann man auch um diesen wieder elliptische und hyperbolische Fixpunkte finden, um die elliptischen dann wieder

usw. usw. D.h. das gestörte System hat im Poincaré-Schnitt eine fraktale Struktur. Man konnte das schon vorher anhand der Cantor-Menge vermuten, die ja auch ein Fraktal ist. Um die hyperbolischen Fixpkt. ist hingegen Chaos zu erwarten, denn die Bewegung ist um diese instabil, d.h. nicht (quasi-)periodisch um einen Fixpunkt.

In der Tat kann man dieses in folgenden Bild sehr gut erkennen. Um die elliptischen Fixpunkte entstehen Inseln der Stabilität, dazwischen befindet sich immer ein hyperbolischer um den chaotisches Rauschen zu erkennen ist.

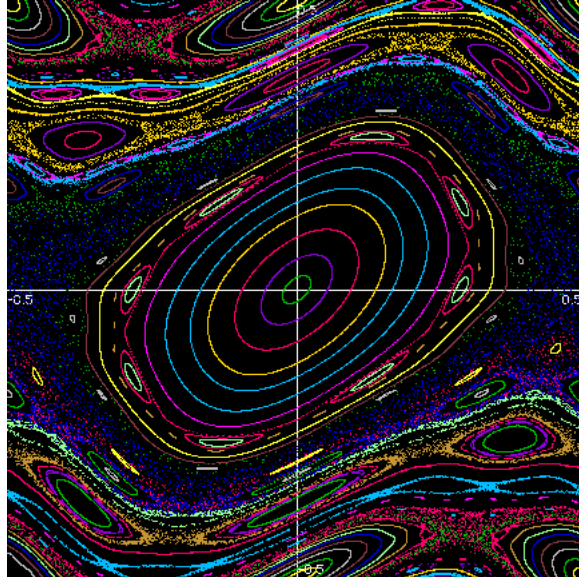


Abbildung 7: Standardabbildung für verschiedene Startwerte

Anmerkung die noch am Ende fiel: G. Contopoulos und andere konnten *theoretisch und numerisch* zeigen, dass für beliebig großes c immer Stabilitätsinseln existieren.

Literatur

- John Argyris. Gunter Faust. Maria Haase. Rudolf Friedrich. Die Erforschung des Chaos. *Springer*, 2010
- V.I. Arnol'd. Mathematical Methods of Classical Mechanics. *Springer*, 1989
- URL: http://www.scholarpedia.org/article/Chirikov_standard_map {abgerufen am 16. Juni 2013}
- Vollständiger Beweis: Jürgen Pöschel. A Lecture on the classical KAM-Theorem. *Proc. Symp. Pure Math.*, 69:707-732, 2001
- Anmerkung: G. CONTOPOULOS et al, Int. J. Bifurcation Chaos 15, 2865 (2005). DOI: 10.1142/S021812740501371X

Abbildungen

- Alle Abbildungen wurden, wenn hier nicht anders angegeben, selbst mit Inkscape erstellt, wobei die Ideen aus (Argyris et al., 2010) stammen.
- Abbildung 7: Florian Freistetter. Chaotische Systeme Teil 4: Wenn das Chaos immer größer wird. Astrodicticum Simplex. URL: <http://scienceblogs.de/astrodicticum-simplex/2009/06/02/chaotische-systeme-teil-4-wenn-das-chaos-immer-grosser-wird/> {abgerufen am 16. Juni 2013}