Poincaré-Abbildungen und -Schnitte

Yannic Toschke & Finn Krüger

9. Juli 2013

1 Definitionen und Sätze

1.1 Definition: Poincaré-Abbildung/Schnitt

Betrachte ein $2n$-dim. System $\{q_1, \ldots, q_n\}$ und sei $\dot{q}_i = f(q_1, \ldots, q_n)$ gegeben, so wählen wir eine $(2n-1)$-dim. Fläche S transversal zur Trajektorie, z.B. indem wir im Phasenraum eine der Ortskoordinaten $p_i = \text{const}$ setzen. Dann ist $P_T : S \to S$ die Abbildung, welche einem Schnittpunkt x_k von S mit der Trajektorie den zeitlich nächsten Schnittpunkt zuordnet.

$$x_{k+1} := P_T(x_k)$$

Dann nennen wir S einen Poincaré-Schnitt und P_T eine Poincaré-Abbildung. Mittels dieser Abbildung können wir nun die Bahnen unseres Systems auf Regelmäßigkeiten untersuchen. Haben wir dabei eine periodische Bewegung, so kann folgender Zustand eintreten:

$$P_T(x^*) = x^*$$

In diesem Fall liegt ein Fixpunkt vor und die Trajektorie schneidet unsere Fläche S immer im selben Punkt x^* nach einer festen Zeit T, was die Bewegung auf einer geschlossenen Bahn bedeutet. Diese kann nun auf ihre Stabilität untersucht werden.

1.2 Definition: Fixpunkt

Sei $\varphi : I \to I$ wobei $I \subset \mathbb{R}^n$, dann nennen wir x^* einen Fixpunkt von φ, wenn $\varphi(x^*) = x^*$ gilt.

1.3 Fixpunktsatz von Banach

Sei:
i) M ein metrischer Raum, $I \subset M$ zusammenhängend und konvex, $\varphi : I \to I$
ii) $\parallel \varphi(x) - \varphi(y) \parallel \leq \lambda \parallel x - y \parallel$ für alle x, y und $\lambda < 1$

So existiert genau ein Fixpunkt $x^* \in I$ und die Folge:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

konvergiert für alle $x_0 \in I$ gegen x^*. Dabei sind in unserem Fall die x_0 als Startwerte q_0 unserer Bewegungsgleichungen zu verstehen. Das Interessante hieran ist, dass unter dieser Voraussetzung $q(t)$ für alle Anfangswerte gegen das entsprechende q^* läuft und somit auf I stabil ist.

2 Beispiele

2.1 Beispiel: Fixpunkt

Betrachte $\varphi(x) := \frac{6-x^2}{5}$ auf $I = [0, 2]$, dann ist i) trivialer Weise erfüllt, da wir uns auf $\mathbb{R}$ befinden.
Da ii) $\Leftrightarrow \parallel \varphi'(x) \parallel_\infty < 1$,sehen wir sofort das durch $0 \leq |\varphi'(x)| \leq \frac{4}{5}$ dies erfüllt ist. Folglich existiert genau ein Fixpunkt $x^* = 1$ und die Folge $x_{n+1} := \varphi(x_n)$ konvergiert für alle $x_0 \in I$ gegen x^*.

2.2 Beispiel: Poincaré-Abbildung

Betrachte die transformierte Hamiltonfunktion $H = (p_1 q_1 + p_2 q_2)(1 - (q_1^2 + q_2^2)) + (q_1 p_2 - q_2 p_1)$ auf $M = \mathbb{R}^2$, daraus folgt:

$$\dot{q_1} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = q_1(1 - (q_1^2 + q_2^2)) - q_2 \qquad \dot{q_2} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = q_2(1 - (q_1^2 + q_2^2)) + q_1$$

Oder in Polarkoordinaten r und θ:

$$\dot{r} = r(1 + r^2) \qquad \dot{\theta} = 1$$

Nun wählen wir S als die positive x-Achse und starten bei einem Wert r_0. Dann gilt nach einer Zeit von $T = 2\pi$, dass $P(r_0) = r_1$ wodurch wir S erneut schneiden. Mit dieser Überlegung lässt sich $P(r)$ nun explizit bestimmen:

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \dot{\theta}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\dot{r}} = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1 + r^2)}$$

Die Lösung des Integrals liefert einen Ausdruck, welcher uns r_1 in Abhängigkeit von r_0 liefert. Dabei handelt es sich um die Poincaré-Abbildung:

$$P(r) = (1 + exp(-4\pi)(r^{-2} - 1))^{-\frac{1}{2}}$$