3.Stabile/Instabile Bahnen

3.1 Definition Chaos:

Ein System heißt genau dann chaotisch, wenn alle Bahnen des Systems instabil sind. An den folgenden Bildern wird dies verdeutlicht:

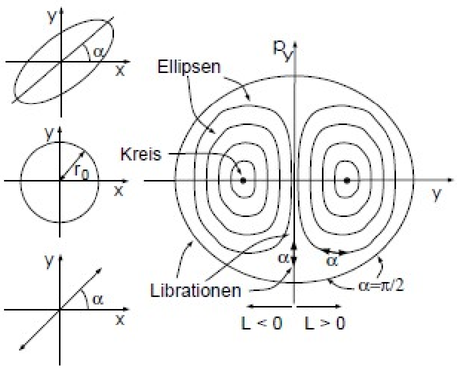
3.2 Beispiel

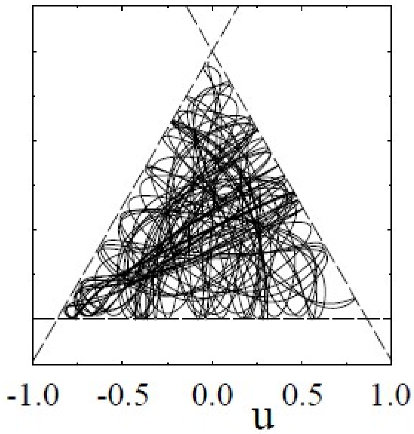
Poincare-Schnitt eines regulären Systems (Harmonischer Oszillator (links))

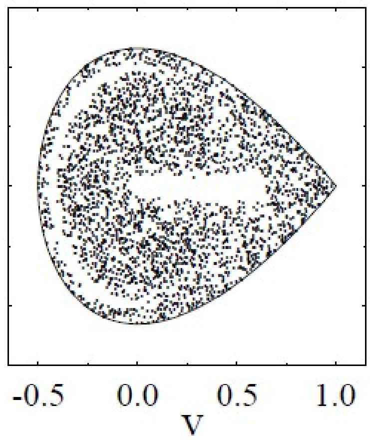
$$V(H.O.) = V(x, y) = \frac{m}{2}\omega^2 r^2$$

Poincare-Schnitt eines chaotischen Systems (Henon-Heiles-Potential (rechts))

$$V(H.H.) = V(r, \Phi) = \frac{1}{2} r^2 - \frac{\varepsilon}{2} r^3 3\cos(\Phi)$$







Zu letzterem ist zu sagen, dass die hier ausgefüllte Fläche (ca. 80% der Gesamtfläche) ausschließlich von einer einzelnen Bahn eingenommen wird.

3.3 Lineare Stabilitätsprüfung

Allgemein sei $\dot{x} = f(x)$ ein System mit geschlossener Bahn. Es muss nun untersucht, ob dieses System stabil ist. Wenn v_0 eine infinitisimale Störung ist, gilt:

$$\begin{aligned} x^* + v_1 &= P(x^* + v_0) \\ &= P(x^*) + (DP(x^*))\,v_0 + O(\|v_0\|) \end{aligned}$$

Wegen der Gleichheit von Punkt und Poincare-Abbildung an dem bestimmten Fixpunkt, gilt durch Gleichsetzung der Terme:

$$x^* + v_1 = P(x^*) + (DP(x^*))\,v_0$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = (DP(x^*))\,v_0$$

Die Abbildung DP wird auch als „linearisierte Poincare-Abbildung“ genannt.

3.3.1 Satz

Ein Fixpunkt ist genau dann stabil, wenn die Eigenwerte der linearisierten Poincare-Abbildung kleiner als 1 sind. Um diesen Satz nachzuvollziehen, schreiben wir die Störung als Summe von Vektorkomponenten:

$$v_0=\sum_{j=1}^{n-1} v_j e_j$$

Nun wenden wir die obige Erkenntnis an:

$$v_1=(DP(x^*))v_0=(DP(x^*))\sum_{j=1}^{n-1} v_j e_j=\sum_{j=1}^{n-1} v_j \lambda_j e_j$$

Dabei sind λ_j die Eigenwerte der linearisierten Poincare-Abbildung. Iterativ ergibt sich dann für k-fache Anwendung der Poincare-Abbildung:

$$v_k=\sum_{j=1}^{n-1} v_j \lambda_j^k e_j$$

In einem stabilen Fixpunkt wollen wir natürlich, dass die Abweichung mit der Zeit gegen 0 konvergiert. Dies passiert genau dann, wenn die Eigenwerte nach unendlicher Iteration gegen 0 laufen, d.h. gerade dann, wenn sie betragsmäßig kleiner als 1 sind.

3.3.2Beispiel

Wir betrachten das aus Beispiel 2.2 bekannte System und untersuchen den Fixpunkt bei 1 auf Stabilität. $r^*=1$ $r=1+\eta$ Mit der aus 2.2 bekannten Definition der Ableitung von r ergibt sich:

$$\dot{r}=r\cdot(1-r^2)=(1+\eta)(1-(1+\eta)^2)=(1+\eta)(1-(1+2\eta+\eta^2))=(1+\eta)(-(2\eta+\eta^2))=-(2\eta+\eta^2+2\eta^2+\eta^3)=-2\eta$$

Damit ergibt sich auf Grund des Landau´schen Papierkorbs für Terme quadratischer und größerer Ordnung die Differentialgleichung $\dot{\eta}=-2\eta$ mit $\dot{\eta}=\dot{r}$. Diese besitzt bekannterweise die Lösung $\eta=e^{-2t}\eta_0$. $\eta_1=e^{-2t}\eta_0=e^{-(2*2\pi)}\eta_0=e^{-(4\pi)}\eta_0$

Der Eigenwert ist also gerade $e^{-(4\pi)}$ und somit kleiner als 1. Damit folgt, dass der Fixpunkt stabil ist, was wir ja auch erwartet hatten.