Handout I zur Vorlesung QUANTENFELDTHEORIE

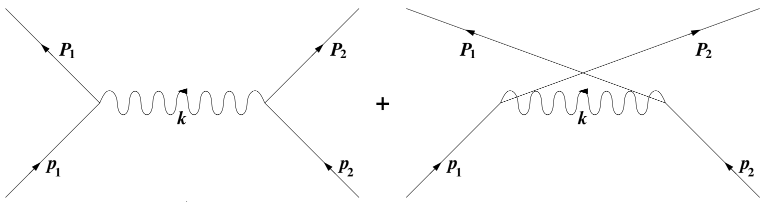
Mic$\hbar$ael Flohr
Annekathrin Müller-Lohmann

Elektron-Elektron-Streuung

zum 11. Januar 2007

ELEKTRON-ELEKTRON-STREUUNG DURCH PHOTONENAUSTAUSCH

Die Vorlesung am 11. Januar 2007 musste ausfallen. Da jedoch der Inhalt für das Lösen der Übungsaufgaben erforderlich ist, sei hier kurz zusammengefasst, was in der Vorlesung besprochen worden wäre. Wir gehen dabei von der Situation aus, die wir am Dienstag (9. Januar 2007) betrachtet hatten:



a) **b)**

Wir fanden, dass die Amplitude für die Graphen (a) und (b) zusammen sich schreiben ließ als

$$\mathcal{M} = A(P_1, P_2) - A(P_2, P_1)\,,$$

so dass der Streuquerschnitt proportional zu

$$|\mathcal{M}|^2 = |A(P_1, P_2)|^2 + |A(P_2, P_1)|^2 - 2\mathrm{Re}(A(P_2, P_1)^* A(P_1, P_2))$$

wird. Im einzelnen fanden wir, dass die Absolutquadrate faktorisieren,

$$|A(P_1, P_2)|^2 = \frac{e^4}{(P_1 - p_1)^4}\left[\bar{u}(P_1)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu u(P_1)\bar{u}(P_2)\gamma_\mu u(p_2)\bar{u}(P_2)\gamma_\mu u(p_2)\right]\,,$$

während der Interferenzterm nicht faktorisiert.

Das einfachste Experiment. In der Realität wird ein Streuexperiment meist so durchgeführt, dass die einlaufenden Elektronen unpolarisiert sind, und die Polarisation der auslaufenden Elektronen nicht gemessen wird. Also wird über die Polarisation der einlaufenden Elektronen gemittelt, und über die der auslaufenden Elektronen summiert. Dabei können wir die Formel

$$\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \frac{\not{p} + m}{m}$$

verwenden. Damit folgt

$$\begin{aligned}
|A(P_1, P_2)|^2 &= \frac{e^4}{(P_1 - p_1)^4}\tau^{\mu\nu}(P_1, p_1)\tau_{\mu\nu}(P_2, p_2)\,,\\
\tau^{\mu\nu}(P_1, p_1) &= \sum_s \sum_S \bar{u}(P_1, S)\gamma^\mu u(p_1, s)\bar{u}(p_1, s)\gamma^\nu u(P_1, S)\\
&= \frac{1}{(2m)^2}\mathrm{tr}\left((\not{P}_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu\right)\,.
\end{aligned}$$

Für den Interferenzterm findet man analog

$$\begin{aligned}
A(P_2, P_1)^* A(P_1, P_2) &\propto \kappa\\
\kappa &= \sum\sum\sum\sum \bar{u}(P_1)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(P_2)\gamma_\mu u(p_2)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu u(P_2)\bar{u}(p_2)\gamma_\nu u(P_1)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Spin-Labels unterdrückt haben.

Spuren von Gamma-Matrizen. Es zeigt sich, dass bei solchen Rechnungen immer wieder Spuren über Produkte von Gamma-Matrizen auszurechnen sind. Bedenkt man, dass $(\gamma^\mu)^2 = \pm 1\!\!1$ und $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0$ für $\nu \neq \mu$ ist, so folgt, dass die Spur über eine ungerade Anzahl von Gamma-Matrizen immer verschwindet, $\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2k+1}}) = 0$. Da es außerdem nur vier verschiedene Gamma-Matrizen gibt, genügt es im Prinzip, nur die Spuren von Produkten von zwei oder vier Gamma-Matrizen zu kennen, da höhere Produkte durch die Clifford-Algebra auf diese reduziert werden können. Wir finden zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu}(P_1, p_1) &= \frac{1}{(2m)^2}\left[\mathrm{tr}(\not{P}_1\gamma^\mu \not{p}_1\gamma^\nu) + m^2\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)\right] \\ &= \frac{4}{(2m)^2}(P_1^\mu p_1^\nu - \eta^{\mu\nu}(P_1\cdot p_1) + P_1^\nu p_1^\mu + m^2\eta^{\mu\nu}), \end{aligned}$$

wobei wir den Term $\mathrm{tr}(\not{P}_1\gamma^\mu \not{p}_1\gamma^\nu) = P_{1,\rho}p_{1,\lambda}\mathrm{tr}(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu)$ schreiben, um ihn auszurechnen. Auf ähnliche Weise kann man κ ausrechnen, was allerdings auf einen sehr länglichen Ausdruck führt.

Hochenergie-Physik. Einfacher wird es, wenn man in den relativistischen Limes geht, bei dem die Ruhemasse der Elektronen gegenüber den Impulsen vernachlässigt werden kann ($m \ll p$). Dann findet man

$$\begin{aligned} \kappa &\sim \frac{1}{(2m)^4}\mathrm{tr}(\not{P}_1\gamma^\mu \not{p}_1\gamma^\nu \not{P}_2\gamma_\mu \not{p}_2\gamma_\nu) \\ &= \frac{-2}{(2m)^4}\mathrm{tr}(\not{P}_1\gamma^\mu \not{p}_1 \not{p}_2\gamma_\mu \not{P}_2) \\ &= \frac{-32}{(2m)^4}(p_1\cdot p_2)(P_1\cdot P_2). \end{aligned}$$

Im relativistischen Limes vereinfacht sich auch $\tau^{\mu\nu}$ zu

$$\tau^{\mu\nu} \sim \frac{4}{(2m)^2}(P_1^\mu p_1^\nu + P_1^\nu p_1^\mu - \eta^{\mu\nu}(P_1\cdot p_1).$$

Damit finden wir im relativistischen Limes

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu}(P_1,p_1)\tau_{\mu\nu}(P_2,p_2) &= \frac{16}{(2m)^4}(P_1^\mu p_1^\nu + P_1^\nu p_1^\mu - \eta^{\mu\nu}(P_1\cdot p_1)(2P_2^\mu p_2^\nu - \eta^{\mu\nu}(P_2\cdot p_2)) \\ &= \frac{32}{(2m)^4}((p_1\cdot p_2)(P_1\cdot P_2) + (p_1\cdot P_2)(p_2\cdot P_1)) \end{aligned}$$

Konkret ausrechnen. Um das wirklich ganz konkret auszurechnen, gehen wir nun ins Schwerpunktsystem und wählen ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Koordinatensystem so, dass $p_1 = E(1,0,0,1)$, $p_2 = E(1,0,0,-1)$ für die einlaufenden Impules, und entspechend $P_1 = E(1,\sin\theta,0,\cos\theta)$, $P_2 = E(1,-\sin\theta,0,\cos\theta)$ für die auslaufenden Impulse ist. Damit ergibt sich für die Skalarprodukte $(p_1\cdot p_2) = (P_1\cdot P_2) = 2E^2$, $(p_1\cdot P_1) = (p_2\cdot P_2) = 2E^2\sin^2\theta/2$, $(p_1\cdot P_2) = (p_2\cdot P_1) = 2E^2\cos^2\theta/2$ und $(P_1 - p_1)^4 = (-2p_1\cdot P_1)^2 = 16E^4\sin^4\theta/2$.

Resultat im relativistischen Limes. Nun können wir all das zusammensetzen, um im relativistischen Limes schließlich das Resultat

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_s\sum_S|\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4m^4}f(\theta), \\ f(\theta) &= \frac{1+\cos^4\theta/2}{\sin^4\theta/2} + \frac{2}{\sin^2\theta/2\,\cos^2\theta/2} + \frac{1+\sin^4\theta/2}{\cos^4\theta/2}. \end{aligned}$$

Der erste Term stellt die Vorwärtsstreuung dar, der dritte die durch die Symmetrie $\theta \leftrightarrow \pi - \theta$ fixierte Rückwärtsstreuung, da die beiden Elektronen ununterscheidbar sind. Der mittlere Term ist die Quanten-Interferenz, das positive Vorzeichen rührt daher, dass die Elektronen Fermionen sind.