Übung XI zur Vorlesung QUANTENFELDTHEORIE

Mic$\hbar$ael Flohr
Annekathrin Müller-Lohmann

Spinoren

19. Dezember 2006 (Abgabe 9. Januar 2007)

SPINOR-DARSTELLUNGEN DER LORENTZ-GRUPPE

Die genaue Analyse der Darstellungstheorie der Lorentz-Gruppe $SO(1,3)$ unter Berücksichtigung der Parität ergibt eine höchst elegante und mathematisch rigorose Herleitung der Dirac-Gleichung. Diese Übungen vervollständigen den Stoff der Vorlesung.

[H1] *Lorentz-Vektor aus Spinoren* **[3 pts]**

Zeige durch explizite Rechnung, dass die Darstellung $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ der Lorentz-Gruppe in der Tat der Lorentz-Vektor ist.

[H2] *Drei-Vektoren* **[5 pts]**

Betrachte die beiden Darstellungen $(1,0)$ und $(0,1)$, die insgesamt sechs linear unabhängige Objekte enthalten. Wie transformieren diese unter der Lorentz-Gruppe? Vergleiche dies mit den Transformationen des elektrischen und magnetischen Feldes $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Schließe daraus, dass das elektromagnetische Feld in der reduziblen Darstellung $(1,0)\oplus(0,1)$ transformiert. Zeige, dass es die Parität ist, die uns zwingt, diese reduzible Darstellung zu nehmen.

[H3] *Dirac-Gleichung* **[5 pts]**

Um die Dirac-Gleichung als eine Projektion, die in ein beliebiges Inertialsystem geboostet wird, verstehen zu können, muss gezeigt werden, dass

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{\varphi}\cdot\vec{K}}\gamma^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\varphi}\cdot\vec{K}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{e}^{\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} = \cosh\varphi + \vec{\sigma}\cdot\hat{\varphi}\sinh\varphi$$

ist. Hierbei ist $\hat{\varphi} = \vec{\varphi}/\varphi$ ein Einheitsvektor. Überlege nun, dass $\vec{p} = m\hat{\varphi}\sinh\varphi$ ist, um so die Dirac-Gleichung herzuleiten. Zeige abschließend, dass in der Tat

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,3,$$

ist.

[H4] *Rarita-Schwinger-Gleichung* **[15 pts]**

Freiwillige Extra-Aufgabe für Extra-Neugierige! Zeige, dass ein Spin-$\frac{3}{2}$ Teilchen als ein Vektor-Spinor beschrieben werden kann, also als ein Objekt $\Psi_{\alpha\mu}$, das sowohl einen Dirac-Spinor- als auch einen Lorentz-Vektor-Index trägt. Finde die zugehörige Bewegungsgleichung, die Rarita-Schwinger-Gleichung. *Hinweis*: Das Objekt $\Psi_{\alpha\mu}$ hat 16 Komponenten, die durch Projektion auf insgesamt $2\frac{3}{2}+1=4$ Komponenten reduziert werden müssen.