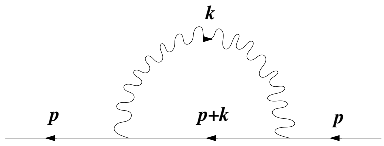
FEYNMAN-REGELN FÜR DAS DIRAC-FELD

Um Amplituden mit Elektronen ausrechnen zu können, wurden in der Vorlesung die Feynman-Regeln hergeleitet und das Problem aufgezeigt, dass man häufig Spuren über Produkte von Gamma-Matrizen ausrechnen muss. Hier wollen wir die in der Vorlesung offen gelassenen Dinge vervollständigen.

[H1] *Feynman-Diagramm* **[3 pts]**

Wende die Feynman-Regeln an, um die Amplitude für das folgende Diagramm anzugeben:



.

[H2] *Elektron-Streuung* **[10 pts]**

In der Vorlesung wurde die Streuung zweier Elektronen besprochen. Sei die Amplitude des Prozesses durch $\mathcal{M}$ gegeben. Dann ist der Streuquerschnitt gegeben durch

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| E_{p_1} E_{p_2}}\, S\, \frac{\mathrm{d}^3 k_1}{(2\pi)^3 E_{k_1}} \cdots \frac{\mathrm{d}^3 k_n}{(2\pi)^3 E_{k_n}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_{j=1}^{n} k_j) |\mathcal{M}|^2 ,$$

wobei $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ die Geschwindigkeiten der einlaufenden Teilchen sind, $E_p = 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ für Bosonen bzw. $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}/m$ für Fermionen und $S = \prod_i (1/n_i!)^{-1}$ ein statistischer Faktor ist, wobei die n_i die Anzahl von identischen Teilchen der Sorte i im Endzustand bezeichnet.

Leite aus der in der Vorlesung angegebenen Amplitude $\mathcal{M}$ für die Streuung zweier Elektronen im relativistischen Limes den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{8E^2} f(\theta)$$

her.

[H3] *Spuren mit Gamma-Matrizen* **[2+2+2+2+2+2 pts]**

Da es nur vier verschiedene Gamma-Matrizen gibt, kann man alle Produkte von Gamma-Matrizen mit Hilfe der Clifford-Algebra auf Produkte von höchstens vier Gamma-Matrizen reduzieren. Zeige die folgenden Identitäten:

i. $\mathrm{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4\eta^{\mu\nu}$.

ii. $\mathrm{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\lambda})$.

iii. Es sei $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ total antisymmetrisch mit $\varepsilon^{0123} = +1$ (also $\varepsilon_{0123} = -1$). Es war $\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Zeige $\mathrm{tr}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma = -4\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$.

iv. $\gamma^\mu \not{p}\gamma_\mu = -2\not{p}$.

v. $\gamma^\mu \not{p}\not{q}\gamma_\mu = -4p\cdot q$.

vi. $\gamma^\mu \not{p}\not{q}\not{r}\gamma_\mu = -2\not{r}\not{q}\not{p}$.

Hinweis: Um z.B. die Identität iv. zu erhalten, tauscht man γ^μ nach rechts durch, und erhält damit im ersten Scrhitt $\gamma^\mu p\not{\gamma}_\mu = (2p^\mu - p\not{\gamma}^\mu)\gamma_\mu$.