 Mic$\hbar$ael Flohr
Annekathrin Müller-Lohmann
Relativistische Quantenmechanik 17. Oktober 2006 (Abgabe 24. Oktober 2006)

DIRAC-GLEICHUNG

Wir wiederholen eine Herleitung der Dirac-Gleichung, sowie die einfachsten Lösungen der Gleichung für den freien Fall.

[H1] *Die Dirac-Gleichung* **[2+1+2+2+4 pts]**

Verwenden wir die bekannten Korrespondenzen

$$\vec{p} = -\mathrm{i}\nabla\,, \quad E = \mathrm{i}\partial_t\,,$$

und die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2\,,$$

so erhalten wir die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2)\psi = 0\,.$$

Die zentrale Idee von Dirac war nun, diese Gleichung zu “faktorisieren”, um eine Gleichung zu erhalten, die nur erster Ordnung in den Ableitungen ist.

(a) Machen Sie den Ansatz

$$H\psi = (\alpha_i p^i + \beta m)\psi\,. \tag{1}$$

Das Quadrieren des Ansatzes (1) sollte die Klein-Gordon-Gleichung ergeben. Zeigen Sie, dass damit folgt:

$$\beta^2 = \alpha_i^2 = 1\,, \quad \{\beta, \alpha_i\} = \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \ \text{ für } \ i \neq j\,.$$

(b) Es seien die Dirac-Matrizen γ^μ, $\mu = 0, \ldots, 3$, definiert durch

$$\gamma^0 = \beta\,, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i \ \text{ für } \ i = 1, 2, 3\,.$$

Zeigen Sie, dass damit die Dirac-Gleichung in der kovarianten Form

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

geschrieben werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass die Dirac-Matrizen die Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\,\mathbb{1}_4 \tag{2}$$

erfüllen, wobei $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ die Minkowski-Metrik ist.

(d) Die niedrigst-dimensionalen Matrizen, die die Clifford-Algebra (2) erfüllen, sind 4×4 Matrizen (warum?). Die Wahl dieser Matrizen ist nicht eindeutig. Eine nützliche Wahl ist die sogenannte Weyl- oder chirale Darstellung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\,,$$

wobei die σ^i die Pauli-Matrizen sind. Prüfen Sie nach, dass diese Matrizen in der Tat die Clifford-Algebra (2) erfüllen.

(e) Man kann zeigen, dass tatsächlich die Matrizen α_i, β mindestens die Dimension 4 haben müssen. Der Beweis hat vier Schritte:

   i. Zeigen Sie, dass die Matrizen α_i, β spurfrei sind. *Hinweis*: Berechnen Sie $\beta\alpha_i\beta$, und nehmen Sie davon die Spur.

   ii. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von α_i, β die Werte ± 1 haben.

   iii. Zeigen Sie, dass die Dimension der Matrizen gerade sein muss. *Hinweis*: Kombinieren Sie die Resultate aus (i) und (ii).

   iv. Zeigen Sie, dass die Dimension größer als 2 sein muss. *Hinweis*: Wieviele spurfreie linear unabhängige hermitesche Matrizen gibt es in n Dimensionen?

[H2] *Freie Fermionen* **[2+4+2 pts]**

Betrachten Sie zunächst ein freies Elektron oder Positron in seinem Ruhesystem, also mit Impuls $p^\mu = (m_e, 0, 0, 0)$.

(a) Lösen Sie für diesen Fall die Dirac-Gleichung. Da der innere Freiheitsgrad Spin die Werte $\uparrow$ und $\downarrow$ annehmen kann, gibt es insgesamt vier linear unabhängige Lösungen.

(b) Finden Sie nun die allgemeinen Lösungen für beliebigen Impuls $p^\mu = (p^0, \vec{p})$, indem Sie einen Lorentz-Boost durchführen, der vom Ruhesystem des Teilchens zum entsprechend bewegten System $(p^0, -\vec{p})$ transformiert. *Hinweis*: Es ist nützlich, $\vec{p} = p_\parallel + p_\perp$ zu schreiben, wobei $p_\parallel$ in Richtung der Spin-Achse zeigt.

(c) Betrachten Sie den speziellen Fall, dass wir mit einem ruhenden Elektron mit Spin $\uparrow$ beginnen. Was fällt Ihnen auf, nachdem Sie in ein bewegtes Bezugssystem transformiert haben?

[H2] *Eichinvarianz* **[3 pts]**

Betrachten Sie ein geladenes Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ in einem elektromagnetischen Potential $A^\mu(x)$. Zeigen Sie, wie sich der Dirac-Spinor des Teilchens bei einer Eichtransformation $A^\mu(x) \mapsto A^\mu(x) + \partial^\mu \lambda(x)$ transformieren muss, damit weiter die Dirac-Gleichung gilt. Beachten Sie, dass Sie in der Dirac-Gleichung bei minimaler Kopplung die kovariante Ableitung $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - eA^\mu$ verwenden müssen.